

THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR : Mathématiques

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
de PARIS

par

M. BIAUSSE Dominique

pour obtenir

le grade de DOCTEUR-INGENIEUR

Sujet de la 1^{ère} - Thèse : CORRECTIONS IMPULSIONNELLES OPTIMALES D'ORBITES
QUASI-CIRCULAIRES : COMPARAISON DE DIVERS ENSEMBLES
DE PROPULSEURS

Sujet de la 2^{ème} - Thèse : RECHERCHE DE STRUCTURE OPTIMALE

soutenue le

12 MARS 1971

devant la Commission d'Examen

MM.

Y. THIRY

Président

P. BROUSSE

Examineurs

J.P. MAREC

THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR : Mathématiques

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
de PARIS

par

M. BIAUSSE Dominique

pour obtenir

le grade de DOCTEUR-INGENIEUR

Sujet de la 1^{ère} - Thèse : CORRECTIONS IMPULSIONNELLES OPTIMALES D'ORBITES
QUASI-CIRCULAIRES : COMPARAISON DE DIVERS ENSEMBLES
DE PROPULSEURS

Sujet de la 2^{ème} - Thèse : RECHERCHE DE STRUCTURE OPTIMALE

soutenue le

devant la Commission d'Examen

MM.	Y. THIRY	Président
	P. BROUSSE	Examineurs
	J.P. MAREC	



CORRECTIONS IMPULSIONNELLES OPTIMALES D'ORBITES QUASI-CIRCULAIRES :

COMPARAISON DE DIVERS ENSEMBLES DE PROPULSEURS

par

Dominique BIAUSSE

Je remercie Monsieur le Professeur THIRY pour m'avoir fait bénéficier de ses précieux conseils et remarques .

Ma reconnaissance va à Monsieur MAREC , de l'O.N.E.R.A., qui m'a orienté dans ce travail et m'a fait profiter de son expérience .

Que Monsieur le Professeur BROUSSE veuille bien recevoir mes remerciements pour avoir accepté de faire partie du Jury .

Enfin, je remercie les personnes de NORD-AVIATION (S.N.I.A.S.) qui m'ont aidé dans la préparation de ce mémoire .

TABLE DES MATIERES

	pages
RESUME, SUMMARY.	2
INTRODUCTION.	3
NOTATIONS.	5
 I. CORRECTIONS D'ORBITE ET CONTROLE D'ATTITUDE. =====	 7
 II. METHODES UTILISEES. =====	 11
II.1 Eléments orbitaux osculateurs.	11
II.2 Domaine accessible.	14
II.2.1 Convexisation du domaine mono-impulsionnel.	14
II.2.2 Le " vecteur efficacité ".	19
 III. PERFORMANCES DES ENSEMBLES DE PROPULSEURS. =====	 21
III.1 Transferts plans.	22
III.2 Transferts tridimensionnels.	26
III.2.1 Propulseur librement orientable	26
III.2.2 Propulseur orientable dans le plan horizontal.	30
III.2.3 Ensemble composé d'un propulseur perpendiculaire au au plan de l'orbite et d'un propulseur orientable (ou 2 propulseurs tangentiels) dans le plan de l'orbite.	33
III.2.4 Un propulseur à direction fixe.	35
III.2.5 Deux propulseurs en opposition à direction fixe.	38
III.3 Rendez-vous de longue durée.	40
 IV. COMPARAISON ENTRE LES DIVERS ENSEMBLES DE PROPULSEURS. =====	 44
 CONCLUSION.	 46
REFERENCES.	47
ANNEXES.	48

RESUME

Les problèmes de corrections impulsionnelles optimales (recherche d'une consommation de masse minimale), d'orbites de faible excentricité, effectuées au moyen de divers ensembles de propulseurs sont traités dans cette étude de façon analytique.

Tout d'abord, quelques ensembles de propulseurs, susceptibles d'être employés comme systèmes de contrôle d'orbite des satellites, sont envisagés.

Les méthodes d'optimisation utilisées pour l'étude de chaque ensemble sont alors développées.

Enfin, les performances de ces ensembles, après avoir été recherchées, sont comparées.

SUMMARY

The problems of multi-impulse, optimal (minimum fuel consumption) corrections of quasi-circular orbits, when these corrections are done by some groups of thrustors, are treated analytically.

First, some groups of thrustors, which can serve as systems of satellite orbit control, are contrived.

Then, the optimization methods, used in the study of each group, are examined.

After the performances of these groups have been searched, they are finally compared.

*

*

INTRODUCTION

Depuis quelques années, de très nombreux satellites ont été lancés ; beaucoup d'entre eux ont été placés sur des orbites de faible excentricité.

Les missions qui sont confiées à ceux-ci sont diverses : télécommunications, météorologie, etc... Dans certains cas, des corrections d'orbite sont nécessaires pour

- annuler les erreurs d'injection du lanceur et amener le satellite exactement sur l'orbite désirée,

- maintenir le satellite sur cette orbite,

la position longitudinale instantanée pouvant, lors de ces deux opérations, être prise en considération.

Aussi, l'étude analytique des transferts et rendez-vous optimaux (du point de vue du coût en propulsif) entre orbites proches, quasi-circulaires, coplanaires ou non, dans un champ de gravitation central, a retenu l'attention de nombreux auteurs. Elle fait appel à la fois à la Mécanique Céleste [1] [2] et aux méthodes modernes d'optimisation issues du Calcul des Variations : particulièrement, celles basées sur le "Principe du Maximum" de PONTRYAGIN [3] et le "Domaine de Manoeuvrabilité" de CONTENSOU [4] .

La présente thèse concerne également des corrections optimales d'orbites quasi-circulaires, mais uniquement lorsque le système de propulsion délivre une poussée impulsionnelle. Toutefois, elle ne se borne pas à l'étude du cas où la poussée est librement orientable, MAREC [5] et EDELBAUM [6] ayant déjà résolu ce problème. L'existence, à chaque instant, de contraintes limitant l'orientation de la poussée est envisagée. Cela permet ainsi d'étudier des cas véritablement pratiques.

En effet, pour des raisons techniques, les propulseurs restent généralement fixes par rapport au satellite. L'exécution des opérations de correction d'orbite avec une consommation de propulsif minimale nécessite alors une orientation appropriée du satellite complet, ce qui le suppose librement orientable à chaque instant. Ce n'est pas toujours réalisable, soit parce que cela dépasse les capacités du système de contrôle d'attitude (chargé des mouvements autour du centre de gravité), soit parce que le coût de la manoeuvre en propulsif est élevé (satellites en rotation), etc... On est ainsi amené à munir le satellite d'ensembles de propulseurs qui puissent effectuer les corrections utiles, sans modifier l'attitude du satellite et sans que cela entraîne un surcroît de consommation important. La disposition de ces propulseurs permet alors, compte tenu de l'attitude du satellite, de déterminer à chaque instant les contraintes sur l'orientation de la poussée.

*

*

*

La présente étude comporte quatre parties :

la partie I où sont envisagés quelques ensembles de propulseurs pouvant convenir, en tant que systèmes de correction d'orbite, à des satellites dotés de systèmes de stabilisation particuliers ;

la partie II où sont développées les méthodes utilisées pour l'étude de chaque ensemble de propulseurs ;

la partie III qui traite des performances des ensembles de propulseurs envisagés dans la partie I ;

la partie IV dans laquelle sont comparées les performances de ces ensembles.

NOTATIONS

a	demi-grand axe
C	$= \int_{t_0}^t \sigma d\tau$ vitesse caractéristique
$\overrightarrow{D}$	direction de la poussée
$\overrightarrow{D^*}$	direction optimale de la poussée
D_1	domaine mono-impulsionnel
D_2	domaine accessible
$\overrightarrow{e}$	vecteur excentricité
e	excentricité
e_x, e_y, e_z	composantes du vecteur excentricité dans le repère absolu Fxyz
F	foyer de l'orbite osculatrice
H	Hamiltonien
i	inclinaison
$\overrightarrow{J}$	déduit de $\overrightarrow{Z}_{plan}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Fz
j_x, j_y	composantes de $\overrightarrow{J}$ dans le repère Fxy
$\mathcal{M}$	mobile
M_0	$= -nt_p$, anomalie moyenne au temps $t = 0$
N	noeud orbital ascendant
n	$= \frac{2\pi}{T}$, moyen mouvement
σ	orbite osculatrice
σ_n	orbite nominale
P	périgée
$\overrightarrow{p}$	vecteur adjoint
$p_{\delta x}, p_{\delta y}$ p_a, p_{e_x}, p_{e_y}	} composantes de l'adjoint cinématique orbital
$\overrightarrow{p_v}$	
t_p	instant de passage au périgée
T	période orbitale
w	vitesse d'éjection du propulsif
Fxyz	trièdre orthonormé absolu lié à l'orbite nominale
	Fxy, plan de l'orbite nominale
	Fz, perpendiculaire au plan de l'orbite nominale

X, Y, Z	composantes de la direction de la poussée dans les axes tournants
$\mathcal{M}XYZ$	axes tournants liés au mobile
$\mathcal{M}X$	dirigé radialement
$\mathcal{M}Y$	dirigé dans le sens du mouvement du mobile et perpendiculaire à $\mathcal{M}X$
$\mathcal{M}Z$	perpendiculaire au plan de l'orbite
$\vec{Z}$	vecteur unitaire perpendiculaire au plan de l'orbite osculatrice
$\vec{Z}_{\text{plan}}$	projection de $\vec{Z}$ dans le plan Fxy
α	ascension droite du mobile
$\vec{\gamma}$	accélération de poussée
γ	module de l'accélération de poussée
Δ	variation de ...
θ	angle de la projection de $\vec{\gamma}$ dans le plan Fxy avec l'axe Fx
σ	ascension droite moyenne de l'époque
Ω	ascension droite du noeud ascendant N
ω	argument du périigée

I. CORRECTIONS D'ORBITE ET CONTROLE D'ATTITUDE

Le système de contrôle d'attitude, appelé également système de stabilisation, se charge des mouvements autour du centre de gravité. Les propulseurs étant généralement fixes par rapport au satellite, il lui incombe donc de se charger de l'orientation de celui-ci, pour que les corrections d'orbite puissent être effectuées avec une consommation de propulsif minimale. Mais, ces modifications d'attitude du satellite ne sont pas toujours réalisables, soit parce que cela dépasse les capacités du système de stabilisation, soit parce que le coût de la manoeuvre est élevé (satellites spinnés), etc... Il faut alors munir le satellite d'ensembles de propulseurs qui puissent effectuer toutes les corrections utiles, sans modifier l'attitude du satellite et sans que cela entraîne un surcroît de consommation important.

On est ainsi amené à donner quelques précisions sur les systèmes de contrôle d'attitude. Toutefois, le propos de cette 1^{ère} partie n'est pas d'effectuer une étude détaillée de ces systèmes, mais simplement de justifier le choix de certains ensembles de propulseurs comme systèmes de correction d'orbite.

Les systèmes de stabilisation tirent souvent parti

- du gradient du champ de gravitation de la terre,
- de la stabilité résultant de l'effet gyroscopique,
- des couples produits par des propulseurs délivrant une poussée dont la direction ne passe pas par le centre de masse du satellite,

et, plus rarement, de la pression de radiation solaire ou des effets produits par des champs magnétiques. On distingue trois grandes catégories :

- Stabilisation par gradient de gravité,
- Stabilisation par rotation,
- Stabilisation 3 axes.

Dans la stabilisation par gradient de gravité, on tire parti du champ de gravitation de la Terre. Les différentes masses élémentaires du satellite sont soumises à des forces gravitationnelles légèrement différentes selon leur distance du centre de la Terre. L'ensemble de ces forces produit un couple qui tend à aligner l'axe principal de moment d'inertie minimum, M_X , avec la verticale locale (fig. 1).

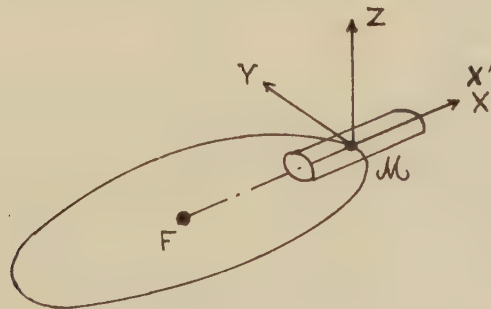


fig. 1

Toutefois, avec ce type de stabilisation, les opérations de correction d'orbite provoquent de graves perturbations. En effet, la direction de la poussée ne passant jamais exactement par le centre de masse du mobile, les corrections d'orbite sont accompagnées de couples perturbateurs qui provoquent d'importantes modifications d'attitude.

Lorsque les propulseurs délivrent une poussée impulsienne, ces inconvénients sont tels qu'il est souhaitable d'abandonner la combinaison gradient de gravité - maintien en position.

La stabilisation par rotation (fig. 2) est basée sur la stabilité découlant de la rigidité du vecteur moment cinétique à l'encontre des couples perturbateurs. L'axe de rotation bénéficie également de cette rigidité et un changement de son orientation se révèle une opération coûteuse du point de vue de la consommation de propulsif. Pour cette raison, le propulseur orientable n'est pas nécessairement la solution la meilleure, si on tient compte de la consommation correspondant à un changement d'attitude du satellite.

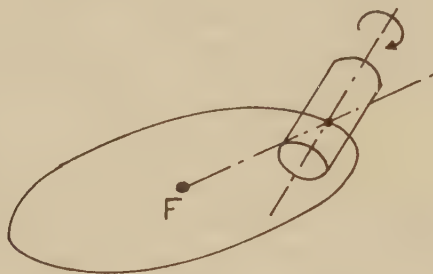


fig. 2

Lorsque la direction de l'axe de rotation est quelconque, la recherche des corrections réalisables avec un ou deux propulseurs en opposition placés le long de cet axe présente un certain intérêt (fig. 3); en effet, il arrive que le satellite soit injecté sur une orbite proche de l'orbite nominale avec une certaine vitesse de rotation et, c'est le cas de plusieurs satellites géostationnaires, avec l'axe de rotation situé dans le plan de l'orbite; on utilise alors des propulseurs en opposition placés le long de l'axe de rotation pour effectuer des corrections dans le plan de l'orbite.

Lorsque la direction de cet axe est perpendiculaire au plan de l'orbite, ce qui est le cas de certains satellites synchrones, la solution qui consiste à placer un propulseur perpendiculairement au plan de l'orbite et un autre dans le plan de l'orbite paraît intéressante (fig. 4).

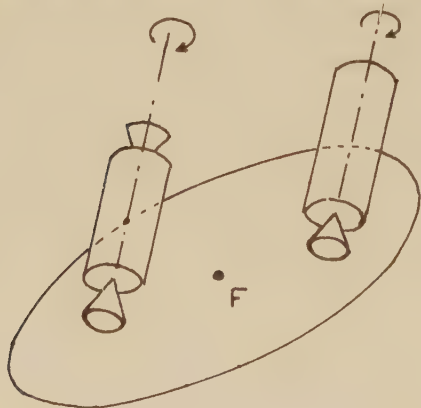


fig. 3

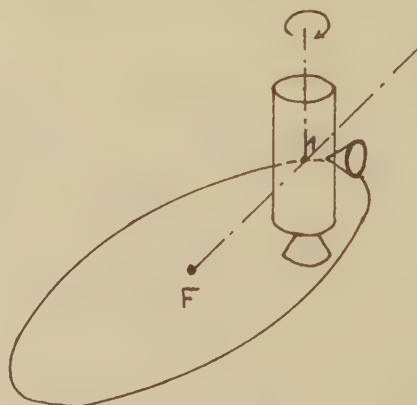


fig. 4

Avec une stabilisation 3 axes, l'orientation de l'ensemble du satellite est contrôlée avec précision.

Un type très courant de satellite ainsi stabilisé est le suivant : le mobile, repéré par le trièdre tri-rectangle $M'X'Y'Z'$, a l'une de ses directions, $M'X'$, confondue avec la verticale locale, une autre, $M'Z'$, restant constamment perpendiculaire au plan de l'orbite (fig. 5).

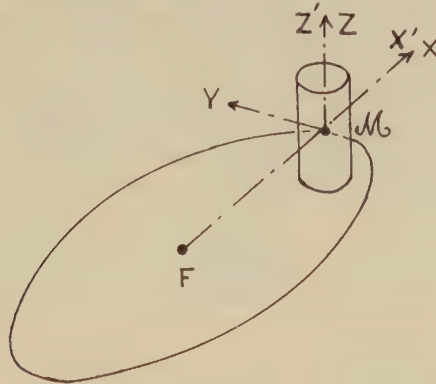


fig. 5

Les ensembles de propulseurs susceptibles d'assurer le maintien en position sont alors les suivants :

- le propulseur orientable suivant toutes les directions, lorsque l'orientation des 3 axes est contrôlée au moyen de jets de gaz,
- l'ensemble composé d'un propulseur placé perpendiculairement au plan de l'orbite et de 2 propulseurs le long de la tangente à l'orbite, dans le cas où la stabilisation est assurée au moyen d'un volant à inertie dont l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de l'orbite (fig. 6).

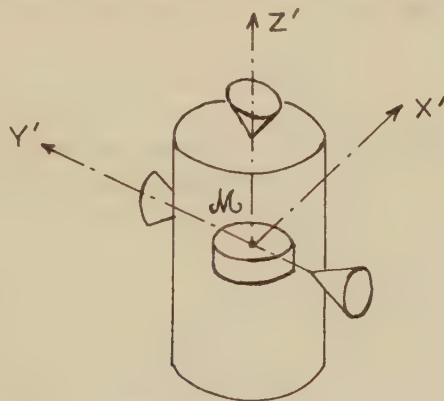


fig. 6

Comme la stabilisation par rotation, la stabilisation par volant d'inertie est fondée sur la stabilité gyroscopique. Toutefois, le moment cinétique n'est pas obtenu par un mouvement de rotation du satellite dans son ensemble, mais par rotation d'un volant à moment cinétique important installé à bord du satellite.

De même qu'avec le satellite spinné, un changement d'orientation de l'axe de rotation est délicat et la consommation que coûte cette manoeuvre est proportionnelle à la grandeur du moment cinétique.

Il existe d'autres types de stabilisation 3 axes pour lesquels une des directions pointe vers le Soleil ou une étoile. Tous ces types peuvent être réalisés au moyen d'un système de contrôle "dual-spin", dérivé du système de stabilisation par rotation : le satellite est composé de deux parties reliées l'une à l'autre par un joint tournant ; la première, appelée rotor, communique à l'ensemble la rigidité gyroscopique, la deuxième, mécaniquement despinnée, est la charge utile dont un des axes de référence doit être orienté dans la direction souhaitée, c'est-à-dire vers la Terre, le Soleil, une étoile, etc... (fig. 7). Le rotor étant la partie principale du satellite et contenant la plupart des équipements, le centre de masse et les propulseurs s'y trouvent généralement ; le problème des corrections orbitales est alors identique à celui des satellites stabilisés par rotation.

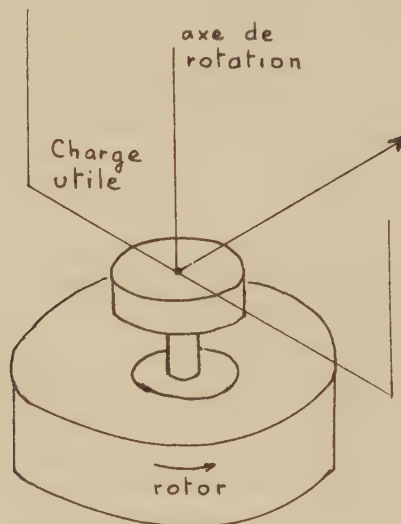


fig. 7

On rencontre également d'autres types de stabilisation comme celui où un seul axe est contrôlé au moyen de jets de gaz, l'axe de lacet $\mathcal{M}X$ (fig. 5). Si le satellite peut tourner d'un angle connu autour de $\mathcal{M}X$, il est commode de placer un propulseur dans le plan $Y\mathcal{M}Z$, car on dispose ainsi d'un propulseur orientable dans ce plan.

En résumé, les ensembles de propulseurs qui feront l'objet d'une étude sont les suivants :

- les ensembles de propulseurs situés dans le plan de l'orbite : le propulseur orientable, les 2 propulseurs tangentiels, les 2 propulseurs en opposition à direction fixe,
- le propulseur librement orientable,
- le propulseur orientable dans le plan perpendiculaire à l'axe de lacet $\mathcal{M}X$,
- l'ensemble composé d'un propulseur perpendiculaire au plan de l'orbite et d'un propulseur orientable dans le plan de l'orbite,
- l'ensemble composé d'un propulseur perpendiculaire au plan de l'orbite et de 2 propulseurs placés le long de la tangente à l'orbite,
- le propulseur à direction fixe,
- les 2 propulseurs en opposition à direction fixe.

II. METHODES UTILISEES

Avant d'aborder la recherche des performances des divers ensembles de propulseurs, il est indispensable de préciser les méthodes employées. Celles-ci sont basées sur l'utilisation

- des éléments orbitaux osculateurs, particulièrement commodes pour caractériser l'état du mobile, quand celui-ci se déplace dans un champ de gravitation central,
- du domaine accessible, dont la représentation géométrique facilite la comparaison des performances de ces ensembles.

Nous allons voir, dans cette 2^{ème} partie, comment ces méthodes peuvent être appliquées aux problèmes de correction d'orbites, de faible excentricité, en régime impulsif.

II.1 Éléments orbitaux osculateurs

Nous nous plaçons dans le cas où le mobile se déplace dans un champ de gravitation central. Le mouvement non perturbé par la poussée étant képlerien, les éléments de l'orbite képlerienne osculatrice (σ) à la trajectoire sont pris à chaque instant comme composantes de l'état du mobile. Précisons que l'orbite képlerienne osculatrice, à l'instant t , à la trajectoire du mobile $\mathcal{M}$ est l'orbite que décrirait $\mathcal{M}$ si, à partir de cet instant t , la poussée était supprimée. L'état du mobile $\mathcal{M}$ est alors entièrement déterminé par la donnée des 5 paramètres de l'orbite osculatrice et par un 6^{ème} élément, la position de $\mathcal{M}$ sur cette orbite.

Ces 6 paramètres, appelés éléments orbitaux osculateurs, peuvent être choisis comme suit (fig. 8) :

- le vecteur unitaire $\vec{Z}$ ($|\vec{Z}|^2 = 1$), perpendiculaire au plan de l'orbite (σ), qui fixe ce plan : ce vecteur peut être remplacé par le vecteur $\vec{Z}_{\text{plan}}$, projection de $\vec{Z}$ sur le plan de référence Fxy , ou encore le vecteur $\vec{J}$, déduit de $\vec{Z}_{\text{plan}}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Fz ;
- le demi-grand axe a ; le vecteur péricée $\vec{e}$, de module l'excentricité
- l'ascension droite moyenne de l'époque

$$\sigma = \Omega + \omega + M_0$$

avec

Ω : longitude du noeud ascendant N

ω : argument du péricée

M_0 : anomalie moyenne de l'époque

$$M_0 = -nt_p \quad \text{où} \quad n = \frac{2\pi}{T} \quad (T \text{ étant la période de révolution})$$

et où t_p est l'instant de passage du mobile au péricée.

Ajoutons, pour compléter ces notations, que α représente l'ascension droite du mobile.

Les formules des perturbations fournissent les dérivées de ces 6 éléments orbitaux osculateurs en fonction de l'accélération perturbatrice $\vec{\delta}$ dont les composantes dans le repère mobile sont :

$$\delta X, \delta Y, \delta Z, \quad \text{avec} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

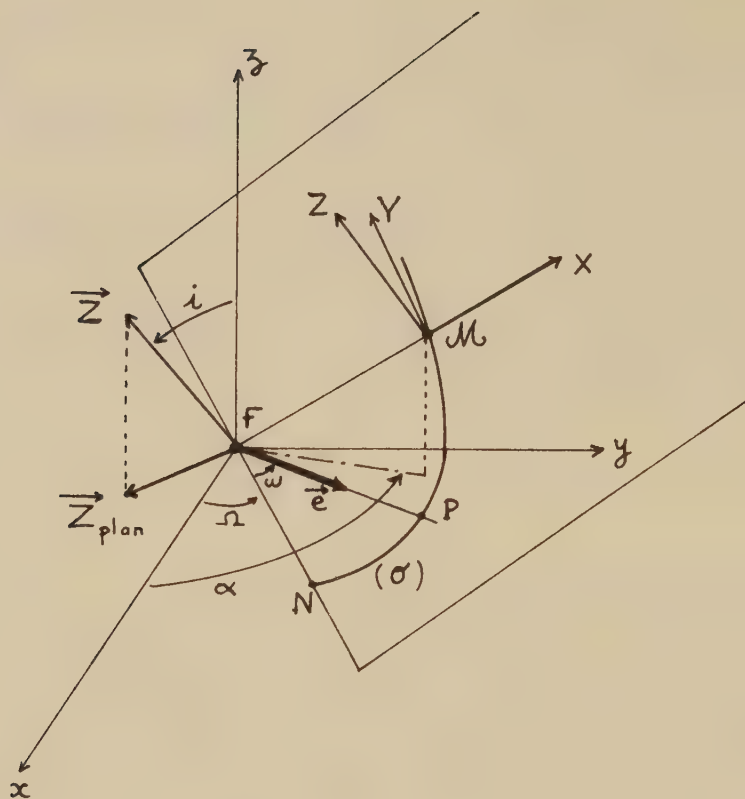


fig. 8

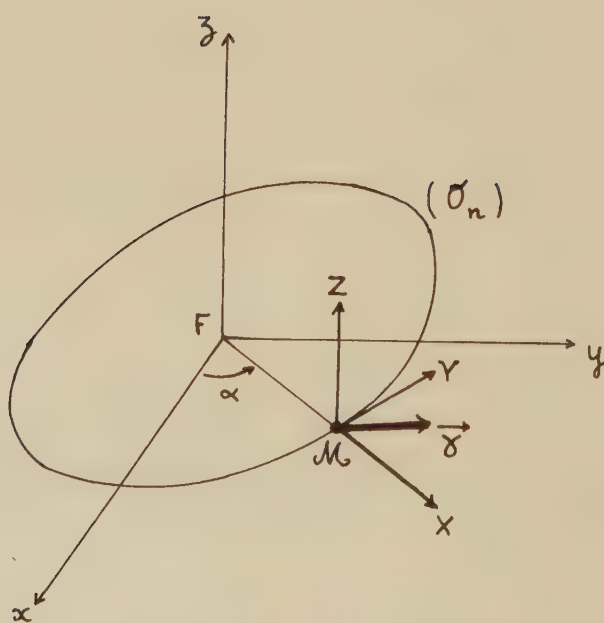


fig. 9

En admettant, et ceci semble raisonnable dans le cas de corrections orbitales, qu'au cours du transfert (ou rendez-vous) l'orbite osculatrice (σ) s'écarte très peu d'une orbite nominale (σ_n), il est possible de linéariser les équations des perturbations avec une bonne approximation [2].

Ceci conduit, après remplacement de l'orbite osculatrice (σ) par une orbite (σ_n) d'excentricité et d'inclinaison nulles (fig. 9), aux équations linéarisées suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\alpha} &= \frac{1}{n^2 a} \cos \alpha \cdot Z \delta \\ \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{1}{n^2 a} \sin \alpha \cdot Z \delta \\ \frac{da}{d\alpha} &= \frac{2}{n^2} Y \delta \\ \frac{de_x}{d\alpha} &= \frac{1}{n^2 a} (X \sin \alpha + 2 Y \cos \alpha) \delta \\ \frac{de_y}{d\alpha} &= \frac{1}{n^2 a} (-X \cos \alpha + 2 Y \sin \alpha) \delta \\ \frac{d\sigma}{d\alpha} &= \left(-\frac{2}{n^2 a} X + \frac{3\alpha}{n^2 a} Y \right) \delta\end{aligned}$$

avec $d\alpha = n dt$

Sans nuire à la généralité du problème, on peut prendre pour a et n des valeurs normalisées, c'est-à-dire :

$$n = 1 \qquad a = 1$$

Les équations des perturbations prennent alors la forme :

$\frac{dx}{d\alpha}$	$=$	$\cos \alpha \cdot Z \delta$
$\frac{dy}{d\alpha}$	$=$	$\sin \alpha \cdot Z \delta$
$\frac{da}{d\alpha}$	$=$	$2 Y \delta$
$\frac{de_x}{d\alpha}$	$=$	$(X \sin \alpha + 2 Y \cos \alpha) \delta$
$\frac{de_y}{d\alpha}$	$=$	$(-X \cos \alpha + 2 Y \sin \alpha) \delta$
$\frac{d\sigma}{d\alpha}$	$=$	$(-2 X + 3 \alpha Y) \delta$

avec $d\alpha = dt$

Le transfert est défini par $\overrightarrow{\Delta j}$, vecteur rotation du plan de l'orbite, la variation $\overrightarrow{\Delta e}_{\text{plan}}$ de la projection du vecteur péricée $\overrightarrow{e}$, et la dilatation relative du demi-grand axe $\Delta a/a$. Précisons que la durée du transfert n'interviendra jamais dans les calculs, car on supposera que l'arc de transfert est suffisamment grand pour contenir tous les points d'application des impulsions, une révolution suffisant dans tous les cas.

Pour le rendez-vous, il est nécessaire d'ajouter à $\overrightarrow{\Delta j}$, $\overrightarrow{\Delta e}_{\text{plan}}$, $\Delta a/a$: $\Delta \sigma$, qui correspond à une variation de la position du mobile sur son orbite.

II.2 Domaine accessible

Avec une consommation donnée ΔC , il est possible d'atteindre, dans l'espace des variations Δj_x , Δj_y , Δa , Δe_x , Δe_y (transfert) ou Δj_x , Δj_y , Δa , Δe_x , Δe_y , $\Delta \sigma$ (rendez-vous), tous les points situés dans un hypervolume appelé "domaine accessible". Ce domaine peut être obtenu par convexisation géométrique ou analytique du domaine mono-impulsionnel ou encore à l'aide d'une méthode faisant appel au "vecteur efficacité". En Annexe figurent des exemples d'applications de ces méthodes.

II.2.1 Convexisation du domaine mono-impulsionnel

Quand les propulseurs liés au mobile délivrent une poussée impulsionnelle (poussée infinie pendant un temps infiniment petit), on adopte pour représenter la consommation la quantité

$$C = \int_{t_0}^t \gamma \, d\tau \quad \text{appelée "vitesse caractéristique",}$$

γ étant le module de l'accélération de poussée.

La vitesse caractéristique est une fonction monotone décroissante de la masse, la relation entre C et m s'obtenant par intégration de l'équation

$$\gamma = \frac{F}{m} = -w \frac{\dot{m}}{m}$$

Comme w , la vitesse d'éjection du propulsif, est constante, ceci conduit à :

$$\int_{t_0}^t \gamma \, d\tau = -w \log \frac{m}{m_0}$$

La vitesse caractéristique croît donc de façon monotone lorsque la masse m diminue.

Les équations des perturbations deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dC} &= \cos \alpha \cdot Z \\
 \frac{dy}{dC} &= \sin \alpha \cdot Z \\
 \frac{da}{dC} &= 2Y \\
 \frac{de_x}{dC} &= X \sin \alpha + 2Y \cos \alpha \\
 \frac{de_y}{dC} &= -X \cos \alpha + 2Y \sin \alpha \\
 \frac{d\sigma}{dC} &= -2X + 3\alpha Y
 \end{aligned}$$

Avec une impulsion de vitesse caractéristique ΔC , on peut atteindre dans l'espace à 5 (ou 6) dimensions des variations Δj_x , Δj_y , Δa , Δe_x , Δe_y (et $\Delta \sigma$), tous les points situés dans ce qui est appelé "domaine mono-impulsionnel". Ces points sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Delta j_x &= Z \cos \alpha \cdot \Delta C \\
 \Delta j_y &= Z \sin \alpha \cdot \Delta C \\
 \Delta a &= 2Y \cdot \Delta C \\
 \Delta e_x &= (X \sin \alpha + 2Y \cos \alpha) \cdot \Delta C \\
 \Delta e_y &= (-X \cos \alpha + 2Y \sin \alpha) \cdot \Delta C \\
 \Delta \sigma &= (-2X + 3\alpha Y) \cdot \Delta C
 \end{aligned}$$

Ainsi défini par l'analyse des possibilités physiques, ce domaine n'est pas toujours convexe. De la même façon que le "domaine de manoeuvrabilité" de CONTENSOU [4] avec lequel il coïncide (à un facteur multiplicatif près), il faut le rendre tel.

En effet, soit A_1 et A_2 deux points de ce domaine atteints avec une impulsion ΔC et tels que :

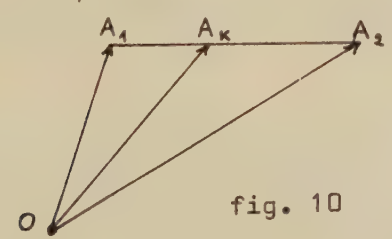


fig. 10

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA_1} &= \overrightarrow{V_1} \Delta C & \overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{V_2} \Delta C \\
 \text{Soit } A_k &\text{ un point appartenant au segment } A_1A_2 \text{ tel que :} \\
 \overrightarrow{A_1A_k} &= a \overrightarrow{A_1A_2} \quad (0 \leq a \leq 1) \\
 &= a(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) \\
 \text{Alors } \overrightarrow{OA_k} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_k} = \overrightarrow{V_1} \Delta C + a(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}) \Delta C \\
 &= \overrightarrow{V_1} (1 - a) \Delta C + \overrightarrow{V_2} a \Delta C
 \end{aligned}$$

En choisissant $\vec{V}_1$, avec une vitesse caractéristique donnée ΔC , on atteint A_1 .

En choisissant $\vec{V}_2$, avec la même vitesse caractéristique ΔC , on atteint A_2 .

En choisissant successivement $\vec{V}_1$ avec une consommation $\Delta C_1 = (1-a)\Delta C$ puis $\vec{V}_2$ avec $\Delta C_2 = a\Delta C$, on atteint A_k avec une consommation $\Delta C_1 + \Delta C_2 = \Delta C$.

Ainsi, tout point de $A_1 A_2$ peut être atteint au moyen de deux impulsions identiques à celles qui permettent d'atteindre A_1 et A_2 et dont la somme des vitesses caractéristiques est égale à ΔC .

On en conclut que le domaine obtenu par convexisation du domaine mono-impulsionnel représente toutes les variations que l'on peut effectuer avec un nombre quelconque d'impulsions dont la somme des vitesses caractéristiques est égale à ΔC : il est appelé "domaine accessible".

Les points correspondants aux solutions optimales en constituent la frontière. Certains, communs à la frontière du domaine accessible (D_2) et à celle du domaine mono-impulsionnel (D_1), peuvent être atteints au moyen de mono-impulsions ; d'autres, communs à la frontière du domaine complémentaire de D_1 par rapport à D_2 et à celle de D_2 , sont atteints au moyen de multi-impulsions.

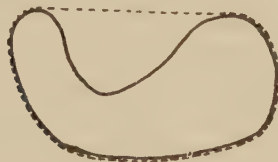


fig. 11

D_2 entouré d'un pointillé
 D_1 entouré d'un trait plein

Lorsqu'il est défini dans un espace de dimension inférieure ou égale à 3, le domaine mono-impulsionnel peut être convexisé géométriquement. Cette méthode convient particulièrement à des problèmes de transferts entre orbites quasi-circulaires, proches, coplanaires ; ainsi, elle a permis de traiter le cas du propulseur orientable dans le plan de l'orbite (Annexe 1).

L'utilisation de la méthode de convexisation suivante, liée au "Principe du Maximum" de PONTYAGIN [3], n'est pas limitée par de pareilles restrictions :

envisageons un vecteur $\vec{p}$ quelconque, défini dans le même espace que le domaine mono-impulsionnel, et cherchons les points M , appartenant à ce domaine, pour lesquels la fonction

$$H = \vec{p} \cdot \vec{OM} \text{ est maximum.}$$

On constate que de tels points ne peuvent appartenir qu'à la frontière de ce domaine (fig. 12). Cette fonction H et ce vecteur $\vec{p}$ seront appelés respectivement "Hamiltonien" et "adjoint", car ils jouent ici le même rôle que l'Hamiltonien et l'adjoint du "Principe du Maximum".

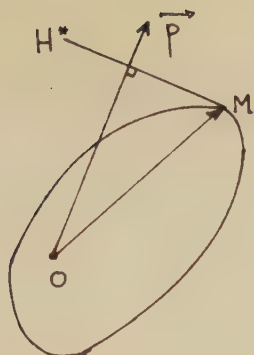


fig. 12

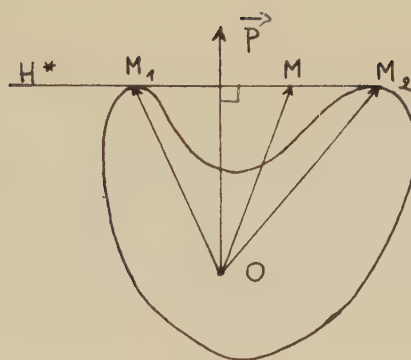


fig. 13

Si le domaine est strictement convexe, à une direction de l'adjoint $\vec{p}$ ne correspond qu'un seul point M, appartenant au domaine, pour lequel l'Hamiltonien H est maximum. Mais, supposons qu'il existe, avec un adjoint donné, un nombre fini de points, appartenant au domaine, $M_1 M_2 \dots M_q$ pour lesquels H prend la même valeur maximum H^* ; alors, pour tous les points M tels que :

$$\vec{OM} = \alpha_1 \vec{OM}_1 + \alpha_2 \vec{OM}_2 + \dots + \alpha_q \vec{OM}_q$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$

et

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i = 1$$

l'Hamiltonien garde cette valeur (fig. 13 et 14).

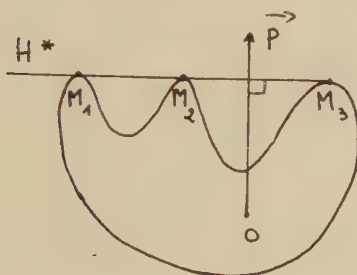


fig. 14

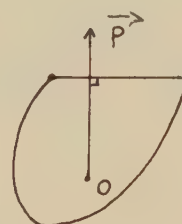


fig. 15

En effet ,

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{OM} &= \vec{p} \cdot (\alpha_1 \vec{OM}_1 + \dots + \alpha_q \vec{OM}_q) \\ &= \alpha_1 \vec{p} \cdot \vec{OM}_1 + \dots + \alpha_q \vec{p} \cdot \vec{OM}_q \end{aligned}$$

Comme $\vec{p} \cdot \vec{OM}_1 = \dots = \vec{p} \cdot \vec{OM}_q$

$$\vec{p} \cdot \vec{OM} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q) \vec{p} \cdot \vec{OM}_1$$

$$\vec{p} \cdot \vec{OM} = \vec{p} \cdot \vec{OM}_1 = \dots = \vec{p} \cdot \vec{OM}_q$$

Ces points M appartiennent donc à la frontière du domaine convexe et peuvent être atteints au moyen de multi-impulsions (Annexe 2). Ceci reste valable quand il y a une infinité de vecteurs pour lesquels l'Hamiltonien est maximum (fig. 15) : il leur correspond des solutions multi-impulsionnelles dégénérées .

Ce procédé est ainsi particulièrement commode pour obtenir les points communs aux frontières du domaine mono-impulsionnel et du domaine convexe.

En voici un exemple, dans le cas où le domaine mono-impulsionnel est une courbe définie par une représentation paramétrique.

Soit M le point courant

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(\alpha) \quad \overrightarrow{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

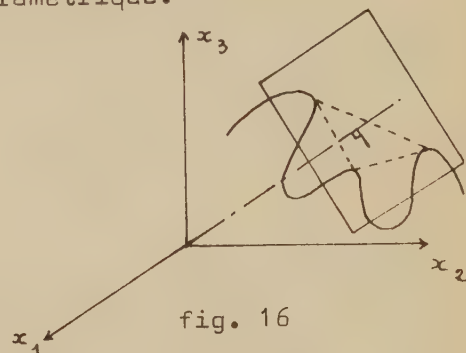


fig. 16

Pour une direction donnée de l'adjoint $\overrightarrow{p}$, l'Hamiltonien a la forme suivante :

$$H(\alpha) = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{f}(\alpha)$$

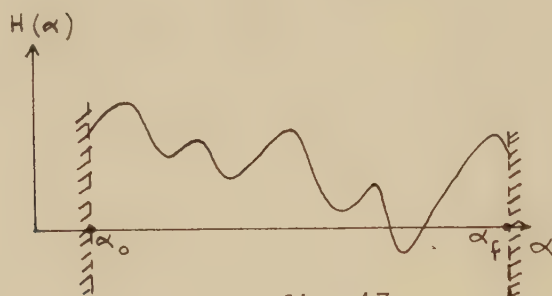


fig. 17

Considérons alors les maxima absolus (pas seulement locaux) que présente cette courbe dans l'intervalle de définition de α .

S'il n'y en a qu'un, à cette direction de l'adjoint $\overrightarrow{p}$ correspond une solution optimale mono-impulsionnelle.

Mais, s'il existe un adjoint $\overrightarrow{p}$ pour lequel on ait deux maxima absolus $H(\alpha_1)$ et $H(\alpha_2)$ tels que

$$H(\alpha_1) = H(\alpha_2)$$

alors, M_1 et M_2 étant déterminés par $\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{f}(\alpha_1)$ et $\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{f}(\alpha_2)$, tout point du segment M_1M_2 peut être obtenu au moyen d'une bi-impulsion ; cette bi-impulsion est constituée de 2 impulsions, de mêmes types que celles permettant d'atteindre M_1 et M_2 , dont la somme des vitesses caractéristiques est égale à celle correspondant à M_1 ou M_2 .

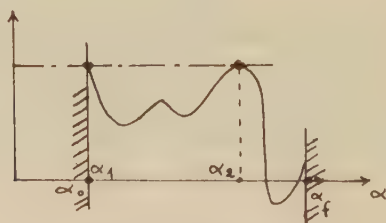


fig. 18(a)

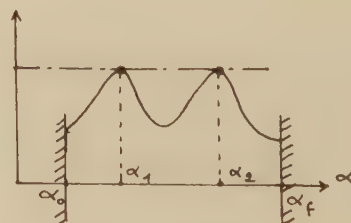


fig. 18(b)

Cela peut être étendu au cas où $H(\alpha)$ possède m maxima absolus de même valeur, auxquels correspondent $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m$. Si les m vecteurs $\overrightarrow{OM_j} = \overrightarrow{f}(\alpha_j)$ sont linéairement indépendants, un point de l'hyperplan constitué par les m points $M_1, M_2, \dots, M_m$ peut être atteint au moyen de m impulsions, de mêmes types que celles permettant d'atteindre $M_1, M_2, \dots, M_m$, dont la somme des vitesses caractéristiques est égale à celle permettant d'atteindre un de ces m points. Mais si, parmi ces m vecteurs, p seulement sont linéairement indépendants, le nombre d'impulsions des solutions optimales peut être ramené à p .

II.2.2 Le " vecteur efficacité "

La méthode, envisagée dans ce paragraphe, est dérivée de celle utilisant la maximisation de l'Hamiltonien pour convexiser le domaine mono-impulsionnel.

Pour effectuer la convexisation du domaine mono-impulsionnel, on est amené à rechercher les points, appartenant à ce domaine, tels que

$$H = \overrightarrow{p} \cdot \Delta \overrightarrow{q} \text{ soit maximum}$$

avec

$$\overrightarrow{q}^T = (j_x, j_y, a, e_x, e_y, \tau)$$

$$\overrightarrow{q}^T = \text{Transposée de } \overrightarrow{q}$$

Or, il revient au même de chercher à maximiser l'Hamiltonien

$$H' = \overrightarrow{p} \cdot \frac{\Delta \overrightarrow{q}}{\Delta C} = \overrightarrow{p} \cdot \frac{d\overrightarrow{q}}{dC}$$

En posant

$$\frac{d\overrightarrow{q}}{dC} = \overline{K}(\overrightarrow{q}, \alpha) \overrightarrow{D}$$

dans lequel $\overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ est la direction de la poussée (X, Y, Z étant les cosinus directeurs de $\overrightarrow{D}$ dans les axes mobiles) et $\overline{K}(\overrightarrow{q}, \alpha)$ la matrice de perturbation, H' peut s'écrire

$$H' = \overrightarrow{p}_v \cdot \overrightarrow{D}$$

avec $\overrightarrow{p}_v = \overrightarrow{p} \cdot \overline{K}(\overrightarrow{q}, \alpha)$

$\overrightarrow{p}_v$ est appelé vecteur efficacité ("Primer Vector" de LAWDEN [7]).

Contrairement à $\overrightarrow{p}$ dont la direction reste constante pendant la durée du transfert (ou rendez-vous), celle de $\overrightarrow{p}_v$ évolue pendant une révolution.

La maximisation de H' comprend alors deux phases successives qui consistent : la première, à rechercher à chaque instant la direction optimale de la poussée $\overrightarrow{D}^*$ pour laquelle $\overrightarrow{p}_v \cdot \overrightarrow{D}$ est maximum ; la deuxième, à rechercher les points d'application des impulsions qui correspondent à des maxima de la fonction $\overrightarrow{p}_v \cdot \overrightarrow{D}^*$.

L'intérêt de la méthode réside dans une interprétation géométrique de la maximisation de l'Hamiltonien. En contrepartie, il est indispensable que les contraintes sur l'orientation de la poussée soient faciles à exprimer dans les axes mobiles; pour cette raison, la méthode n'est pas utilisée dans des problèmes de rendez-vous, car l'expression de $\vec{p}_v$ est alors trop compliquée pour permettre cette interprétation géométrique. Ainsi, pour le problème traité dans l'Annexe 3, concernant des transferts effectués au moyen d'un propulseur orientable dans le plan $Y\mathcal{M}Z$, ces conditions sont respectées.

Pour les problèmes de transferts, les notations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (p_{dx}, p_{dy}, p_d, p_{ex}, p_{ey}) \\ p_{dx} &= p_d \cos \alpha_d & p_{dy} &= p_d \sin \alpha_d \\ p_{ex} &= p_e \cos \alpha_e & p_{ey} &= p_e \sin \alpha_e\end{aligned}$$

Les composantes de $\vec{p}_v^T = (\text{Transposée de } \vec{p}_v)$ dans les axes mobiles sont :

X	$= p_e \sin (\alpha - \alpha_e)$
Y	$= 2p_d + 2p_e \cos (\alpha - \alpha_e)$
Z	$= p_d \cos (\alpha - \alpha_d)$

Si on pose $\vec{\mathcal{M}P} = \vec{p}_v$, le lieu de P dans les axes mobiles est une ellipse.

III. PERFORMANCES DES ENSEMBLES DE PROPULSEURS

A l'aide des méthodes définies précédemment, il est possible de rechercher les performances des divers ensembles de propulseurs envisagés dans la 1^{ère} partie.

Pour chaque ensemble, cela consiste à

- analyser la nature des solutions optimales,
- représenter son domaine accessible.

Le plan d'étude de ces ensembles est le suivant :

le premier paragraphe, qui permet de mieux saisir la notion de domaine accessible, concerne les transferts impulsionsnels optimaux, entre orbites quasi-circulaires proches, réalisés, en une révolution ou plus, au moyen de propulseurs placés dans le plan de l'orbite ;

le deuxième paragraphe concerne également des transferts entre orbites quasi-circulaires proches, mais celles-ci ne sont plus nécessairement coplanaires. C'est ainsi que seront envisagés successivement :

- le propulseur orientable dans toutes les directions,
- le propulseur orientable dans le plan horizontal,
- l'ensemble composé d'un propulseur placé perpendiculairement au plan de l'orbite et d'un propulseur orientable (ou 2 placés le long de la tangente à l'orbite) dans le plan de l'orbite,
- le propulseur à direction fixe,
- l'ensemble formé par deux propulseurs en opposition à direction fixe ;

enfin, le troisième et dernier paragraphe est relatif aux rendez-vous impulsionsnels optimaux de longue durée entre orbites quasi-circulaires proches.

III.1 Transferts plans

Trois ensembles de propulseurs placés dans le plan de l'orbite retiennent l'attention. Ce sont :

- le propulseur librement orientable,
- l'ensemble composé de 2 propulseurs en opposition placés le long de la tangente à l'orbite,
- l'ensemble formé de 2 propulseurs en opposition à direction fixe.

La méthode utilisée pour la recherche des solutions optimales et du domaine accessible est la convexisation géométrique ; le cas du propulseur orientable est d'ailleurs traité dans l'Annexe 1 comme exemple d'application de cette méthode.

Nous allons poursuivre parallèlement l'étude de ces trois ensembles. L'application d'une impulsion $\Delta C = \gamma \Delta \alpha$ provoque les variations :

$$\Delta a = 2 \Delta C \sin (\theta - \alpha)$$

$$\Delta e_x = \Delta C \sin \alpha \cos (\theta - \alpha) + 2 \Delta C \cos \alpha \sin (\theta - \alpha)$$

$$\Delta e_y = -\Delta C \cos \alpha \cos (\theta - \alpha) + 2 \Delta C \sin \alpha \sin (\theta - \alpha)$$

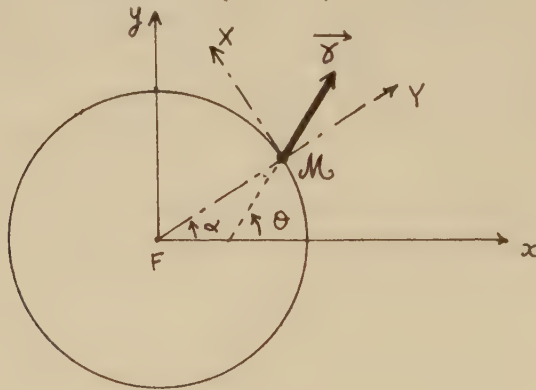


fig. 19

Dans le cas du propulseur orientable, θ est indépendant de α et peut varier de 0 à 2π ; quand les deux propulseurs sont placés le long de la tangente à l'orbite, on a $\theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$. Enfin, dans le cas des propulseurs à direction fixe, θ est fixe et, le choix de l'axe de référence Fx étant libre, sera pris égal à 0 pour l'un des 2 propulseurs et à π pour l'autre.

Les domaines mono-impulsionnels (planche 1) sont alors :

- pour le propulseur orientable : une partie d'un hyperboloïde de révolution ;
- pour les 2 propulseurs tangentiels : 2 circonférences ;
- pour les 2 propulseurs en opposition à direction fixe : 2 fenêtres de Viviani ;

Par la convexisation géométrique de ces domaines, on obtient les domaines accessibles (planche 1).

Ces domaines accessibles sont identiques dans le cas d'un propulseur orientable et dans celui des 2 propulseurs en opposition placés le long de la tangente à l'orbite : une partie d'un cylindre de révolution comprise entre deux parties planes ($\Delta a = \pm 2 \Delta C$).

Les solutions optimales sont donc identiques et :

- de type mono-impulsionnel pour les points appartenant aux deux conférences, la direction de la poussée étant donnée par la tangente à l'orbite ;

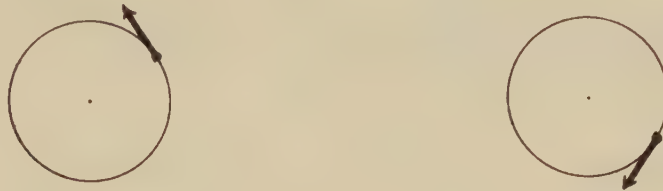


fig. 20

- de type bi-impulsionnel (2 impulsions tangentes à l'orbite) pour les parties planes ainsi que pour la partie cylindrique :
 - pour la partie cylindrique, les impulsions sont séparées par un demi-tour d'orbite ; l'une est accélératrice, l'autre décélératrice et leur rapport fixe Δa ;



fig. 21

- pour les parties planes, il y a dégénérescence, une infinité de solutions pouvant convenir pour un seul point du domaine accessible.

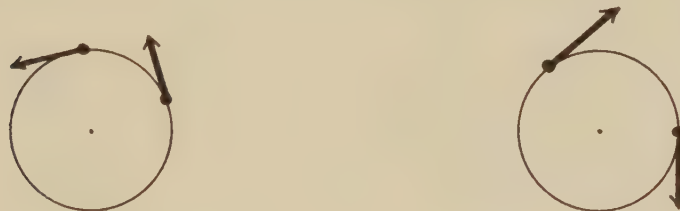


fig. 22

Avec deux propulseurs en opposition à direction fixe, le domaine accessible est composé de 4 parties cylindriques s'appuyant sur des arcs de fenêtres de Viviani et de 2 parties planes rectangulaires. Les solutions optimales sont donc :

- de type tri-impulsionnel pour les parties planes : il y a dégénérescence, car un point de cette surface peut être atteint au moyen de deux tri-impulsions différentes, ainsi que par une infinité de quadri-impulsions. Les tri-impulsions rencontrées sont les suivantes :

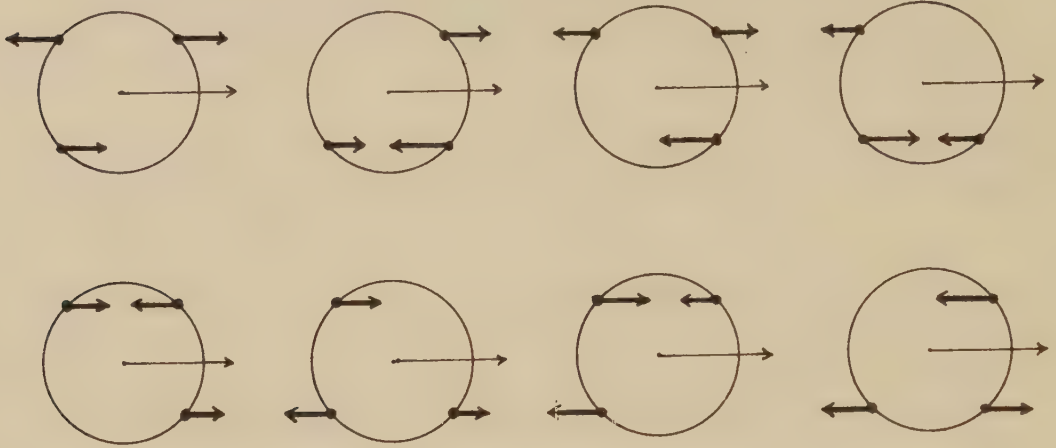


fig. 23

- de type bi-impulsionnel pour les parties cylindriques ;

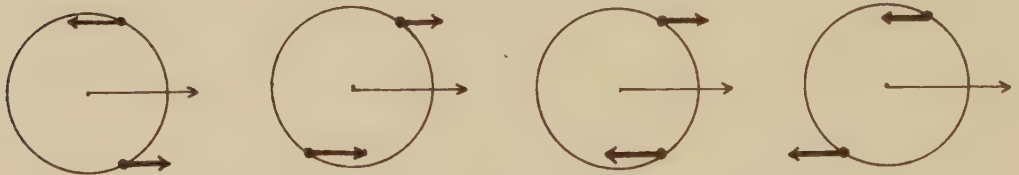
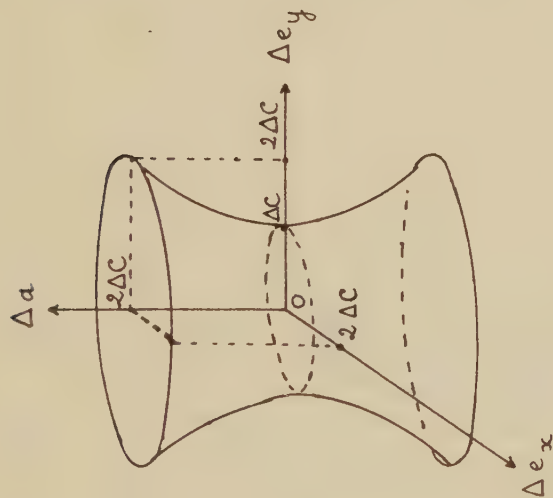


fig. 24

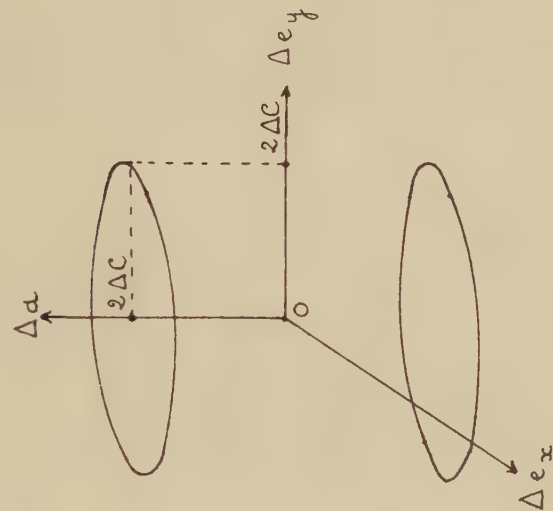
- de type mono-impulsionnel pour les points des arcs de fenêtres de Viviani.

Propulseur
orientable

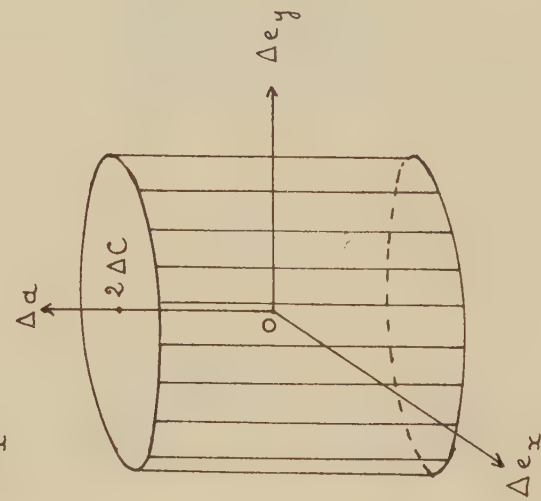
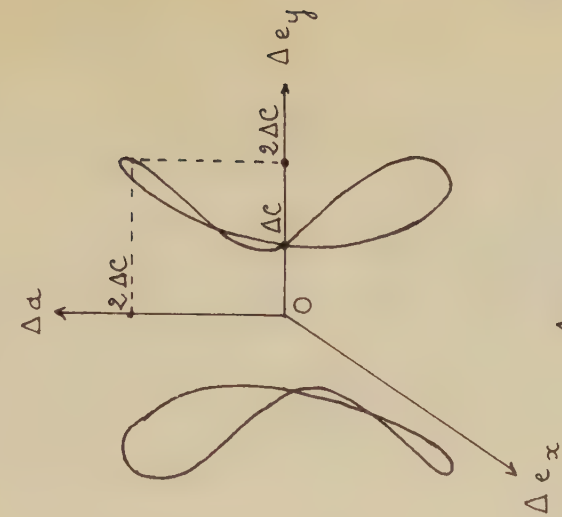


DOMAINE
MONO-IMPULSIONNEL

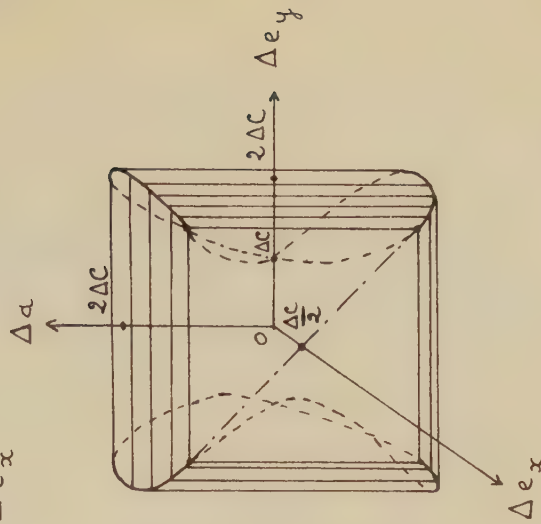
Deux propulseurs
placés tangentielle-
ment



Deux propulseurs en opposition
à direction fixe
 $\theta = k\pi$



DOMAINE
ACCESSIBLE



III.2 Transferts tridimensionnels

Dans la suite, F_x est pris comme ligne des noeuds ($\Delta_{fy} = 0, \Delta_{fx} = \Delta_f$).

III.2.1 Propulseur librement orientable

Ce problème a déjà été étudié par MAREC [5] au moyen de la méthode du "vecteur efficacité".

Nous allons en rappeler les résultats essentiels, car ce système sert de référence pour une comparaison entre les divers ensembles de propulseurs ; ces résultats portent sur le nombre des impulsions et la forme du domaine accessible, les transferts optimaux correspondant aux points de la frontière de ce dernier.

Ce domaine est représenté par des sections $\Delta a = Cte$ dans l'espace à 3 dimensions $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta j$ (planche 2) ; il est réduit à l'octant $\Delta e_x > 0, \Delta e_y > 0, \Delta j > 0$ par des considérations de symétrie que résume le tableau suivant (X, Y, Z étant les cosinus directeurs de l'accélération de poussée) :

Δe_x	Δe_y	Δj	Δa	α	X	Y	Z
$-\Delta e_x$				$\pi - \alpha$	$-X$	Y	$-Z$
	$-\Delta e_y$			$-\alpha$	$-X$	Y	Z
		$-\Delta j$		$\pi + \alpha$	X	Y	Z
			$-\Delta a$	$\pi + \alpha$	$-X$	$-Y$	$-Z$

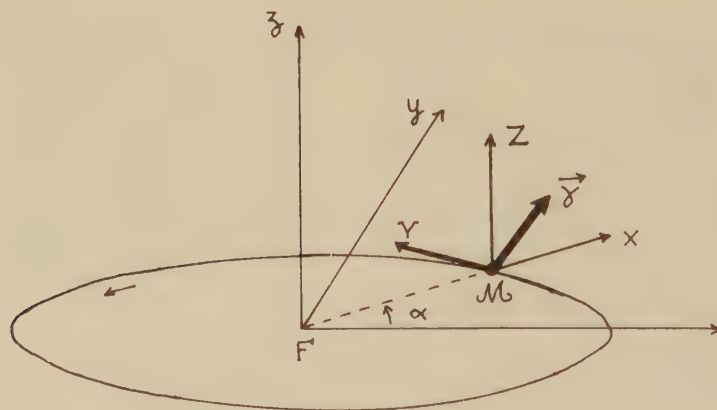


fig. 25

Plusieurs types de solutions se rencontrent :

- Type I quand $\max (\Delta a^2, \Delta e_x^2, \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} |\Delta j| |\Delta e_y| - \Delta j^2) = \Delta a^2$

Equation de la surface du domaine accessible correspondante :

$$(-\Delta e_x^2 + \frac{3}{4} \Delta a^2 + \Delta C^2) (\Delta e_y^2 + \Delta j^2 + \frac{\Delta a^2}{4} - \Delta C^2) + \frac{\Delta e_y^2}{2} (\Delta e_x^2 - \Delta a^2) = 0$$

Les solutions optimales sont des bi-impulsions 1 et 2 pour lesquelles :

$$\begin{aligned} X_2 &= -X_1 \\ Y_2 &= Y_1 \\ Z_2 &= -Z_1 \end{aligned}$$

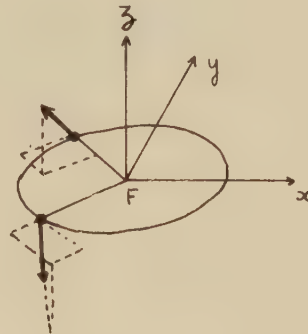


fig. 26

- Type I bis : limite du type I quand $\Delta j = 0$.

Les solutions sont des impulsions tangentiellees. Il y a dégénérescence, un point de la surface du domaine correspondant pouvant toujours être obtenu d'une infinité de façons par des bi-impulsions.

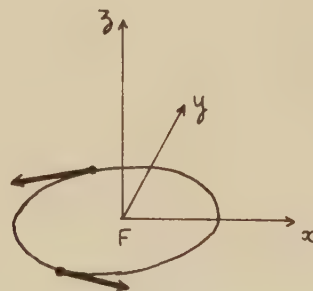


fig. 27

- Type II quand $\max (\Delta a^2, \Delta e_x^2, \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} |\Delta_j| |\Delta e_y| - \Delta_j^2) = \Delta e_x^2$

Equation de la surface du domaine accessible correspondante :

$$\frac{\Delta e_x^2}{4} + \Delta e_y^2 + \Delta_j^2 = \Delta c^2$$

Les solutions optimales sont des bi-impulsions 1 et 2 pour lesquelles :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & \alpha_2 &= \pi \\ X_2 &= -X_1 \\ Y_2 &= -Y_1 \\ Z_2 &= -Z_1 \end{aligned}$$

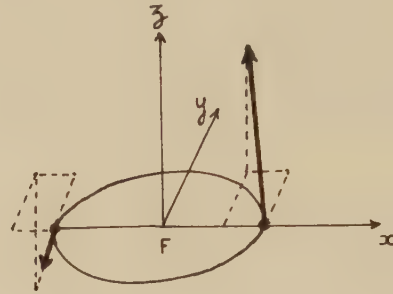


fig. 28

- Type III quand $\max (\Delta a^2, \Delta e_x^2, \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} |\Delta_j| |\Delta e_y| - \Delta_j^2) = \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} |\Delta_j| |\Delta e_y| - \Delta_j^2$

Equation de la surface du domaine accessible correspondante :

$$\frac{\Delta e_x^2}{4} + \left(\frac{|\Delta e_y|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} |\Delta_j| \right)^2 = \Delta c^2$$

Il y a dégénérescence pour ce type de solutions ; tout point du domaine accessible peut être obtenu, en particulier, de deux façons différentes, à l'aide de bi-impulsions.

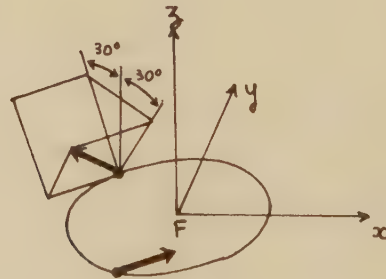
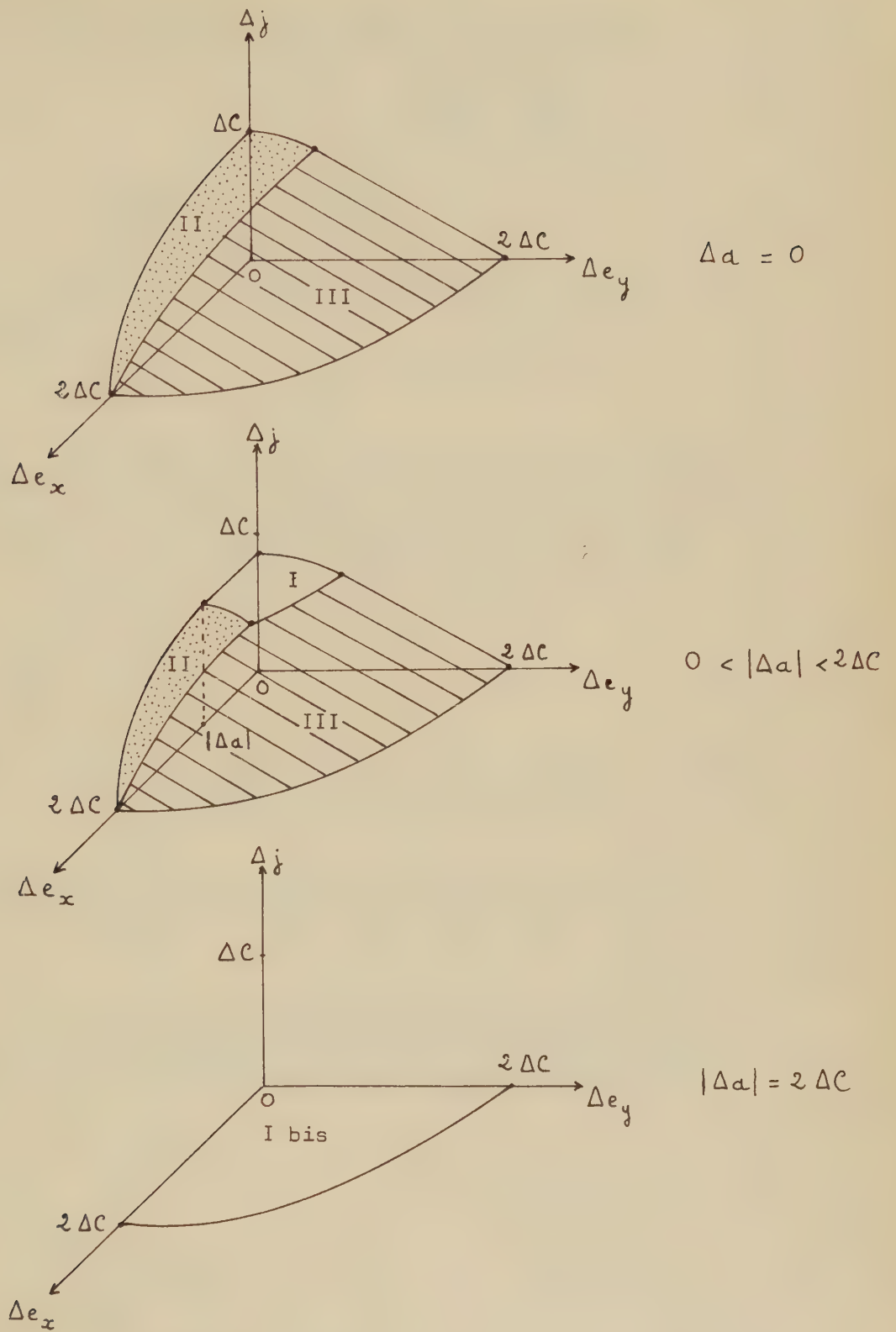


fig. 29

Propulseur librement orientable



III.2.2 Propulseur orientable dans le plan horizontal

Ce problème fait l'objet, dans l'Annexe 3, d'une étude détaillée. Nous en indiquons ici les principaux résultats.

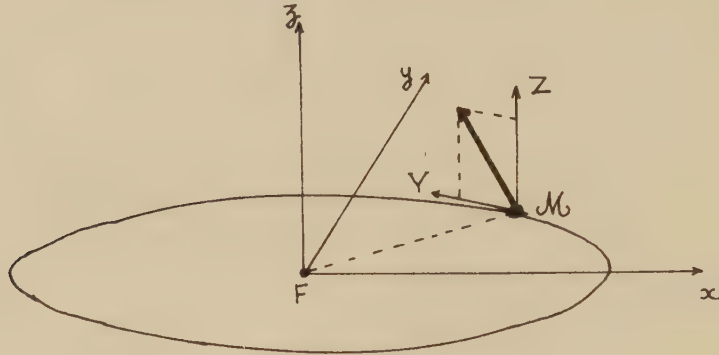


fig. 30

Les solutions optimales sont des types suivants :

- Type I' caractérisé par des bi-impulsions 1 et 2 telles que

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 \\ Z_2 &= -Z_1 \end{aligned}$$

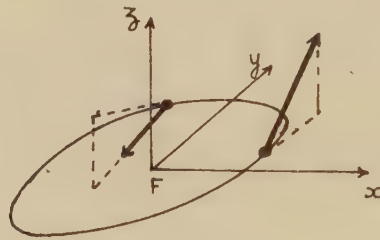


fig. 31

Equation de la surface du domaine accessible correspondante :

$$\left(\Delta C^2 - \frac{\Delta \alpha^2}{4} \right) (\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 - \Delta \alpha^2) + \Delta j^2 (\Delta \alpha^2 - \Delta e_x^2) = 0$$

- Type I'bis : limite du type I' quand $\Delta j = 0$
Les solutions sont des impulsions tangentielles. Il y a dégénérescence, un point de la surface du domaine correspondant pouvant toujours être obtenu d'une infinité de façons par des bi-impulsions.

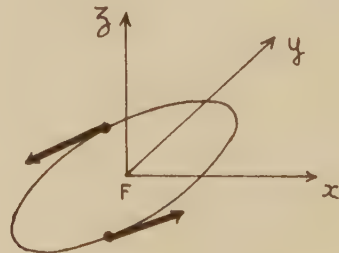


fig. 32

- Type II' : bi-impulsionnel caractérisé par

$$\begin{aligned} Y_2 &= -Y_1 \\ Z_2 &= -Z_1 \end{aligned}$$

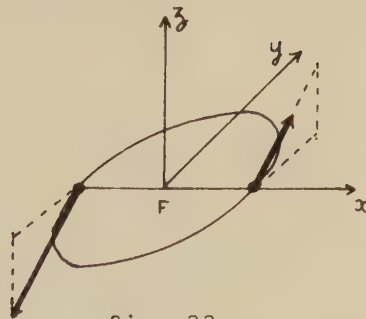


fig. 33

Equation de la surface du domaine accessible correspondante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e_y = 0 \\ \Delta j^2 + \frac{\Delta e_x^2}{h} = \Delta C^2 \end{array} \right.$$

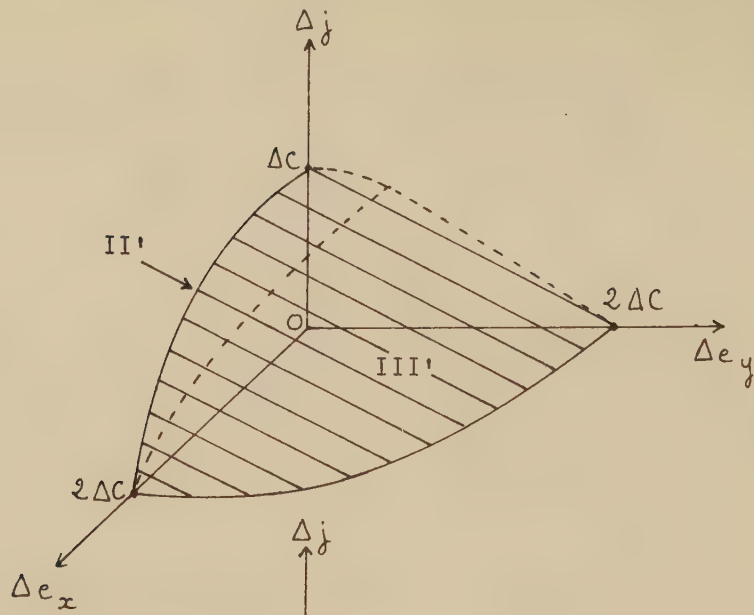
- Type III' (singulier) : il y a dégénérescence pour ce type de solutions ; tout point du domaine accessible peut être obtenu, en particulier, de deux façons différentes, à l'aide de bi-impulsions.

Equation de la surface du domaine accessible correspondante :

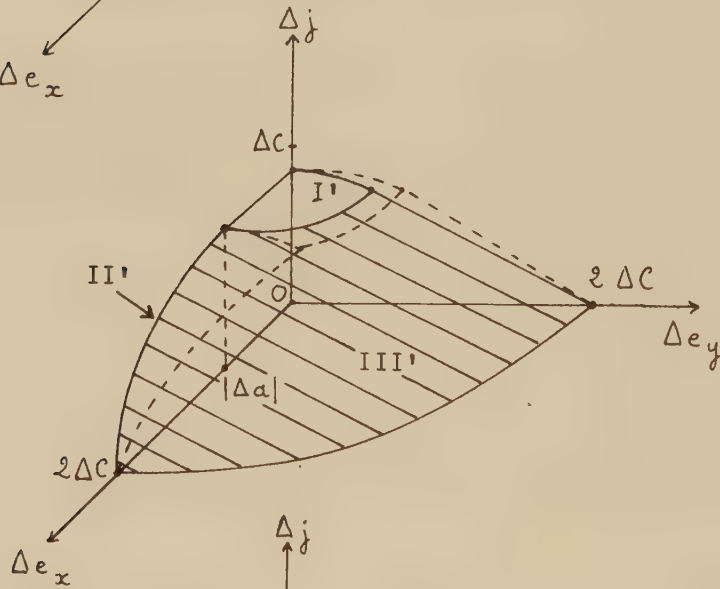
$$\frac{\Delta e_x^2}{h} + \left(\left| \frac{\Delta e_y}{2} \right| + |\Delta j| \right)^2 = \Delta C^2$$

Le domaine accessible est représenté sur la planche 3 par ses sections $\Delta a = Cte$, les pointillés représentant le domaine accessible du propulseur orientable dans toutes les directions.

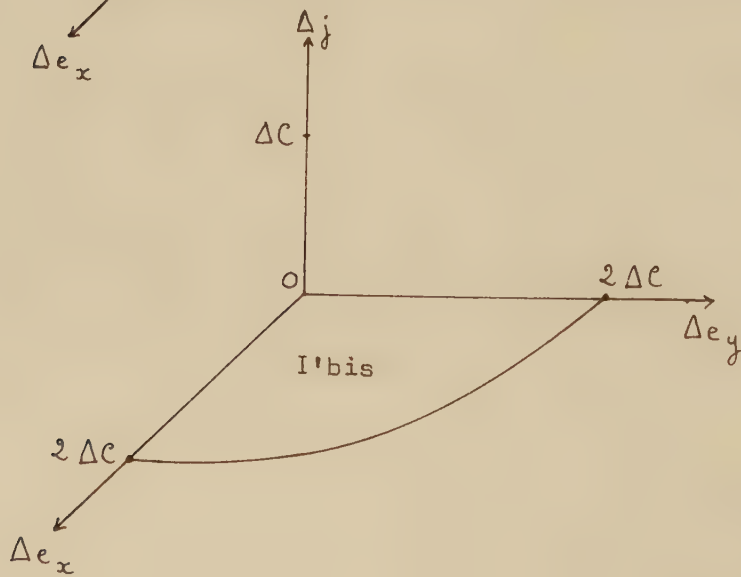
Propulseur orientable dans le plan horizontal



$$\Delta a = 0$$



$$0 < |\Delta a| < 2\Delta C$$



$$|\Delta a| = 2\Delta C$$

III.2.3 Ensemble composé d'un propulseur perpendiculaire au plan de l'orbite et d'un propulseur orientable (ou 2 propulseurs tangentiels) dans le plan de l'orbite

Les deux problèmes, de correction d'inclinaison d'une part, de correction d'excentricité et de demi-grand axe d'autre part, sont découplés. L'optimisation de ces corrections s'effectue séparément.

Le propulseur placé dans le plan de l'orbite étant orientable, l'angle de $\Delta \vec{e}$ avec Fx , support de $\Delta \vec{j}$, n'intervient pas et le domaine accessible est de révolution autour de l'axe des Δj . Deux propulseurs orientés suivant la tangente à l'orbite offrent les mêmes possibilités que le propulseur orientable pour les corrections effectuées dans le plan de l'orbite (cf. III.1)

On dénombre les impulsions optimales en séparant les corrections d'inclinaison et celles dans le plan de l'orbite.

Les corrections d'inclinaison sont effectuées avec le propulseur perpendiculaire au plan de l'orbite : 1 impulsion ; $\Delta j_y = 0$.

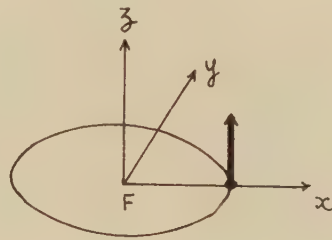


fig. 34

Les corrections dans le plan de l'orbite sont effectuées avec des bi-impulsions tangentielles et parfois des mono-impulsions tangentielles (cf. III.1).

Toute correction peut être effectuée avec un nombre d'impulsions ne dépassant pas 3 . Le domaine accessible est représenté sur la planche 4 ainsi que , en pointillés, celui du propulseur orientable.

1 propulseur dans la direction perpendiculaire au plan de l'orbite
+ 1 propulseur orientable dans le plan de l'orbite

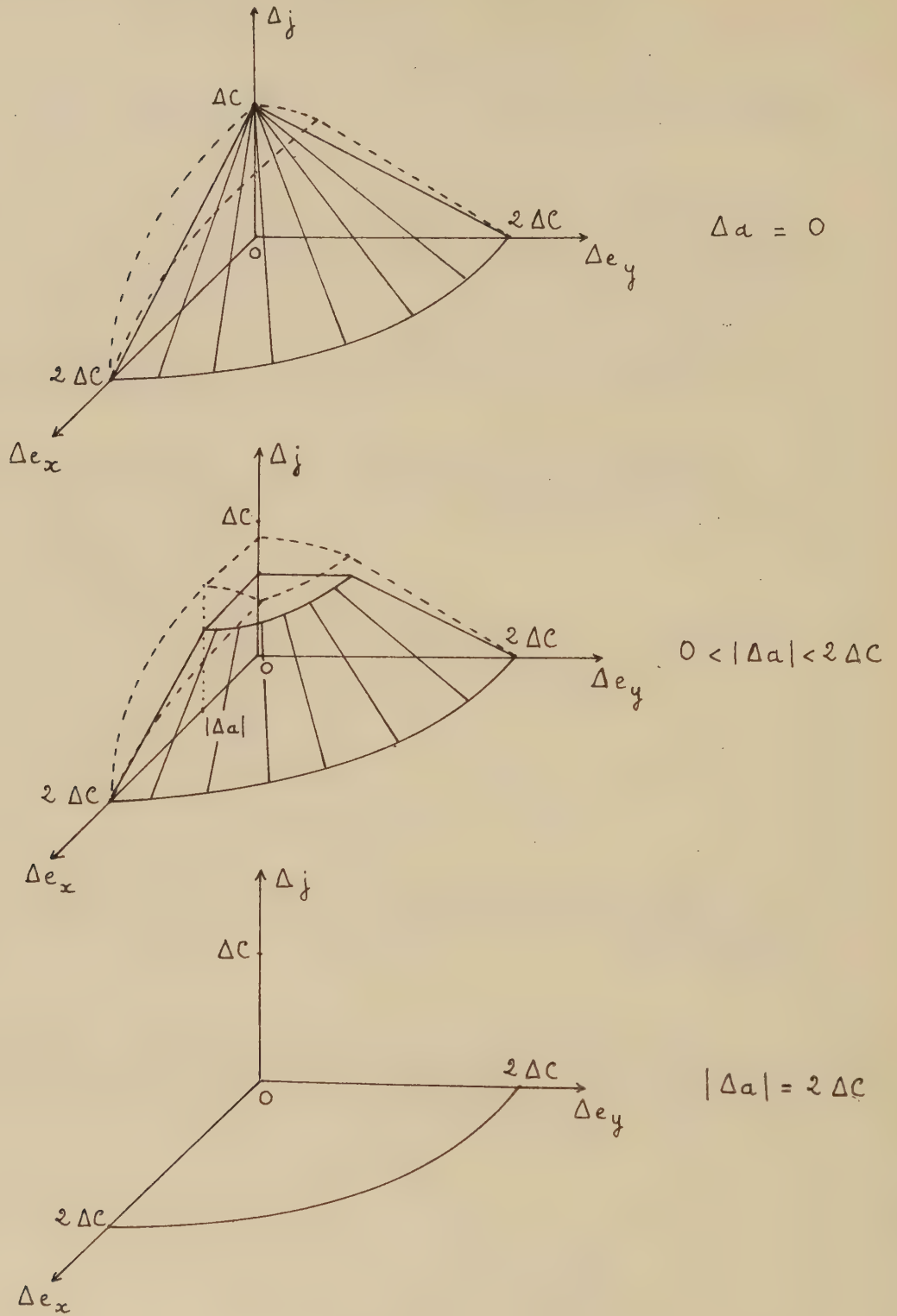


PLANCHE 4

III.2.4 Un propulseur à direction fixe

Pendant la durée du transfert, les cosinus directeurs de la direction de la poussée : $U \cos \theta$, $U \sin \theta$, Z restent constants.

L'application d'une impulsion $\Delta C = \gamma \Delta \alpha$ provoque les variations :

$$\Delta j_x = Z \cos \alpha \cdot \Delta C$$

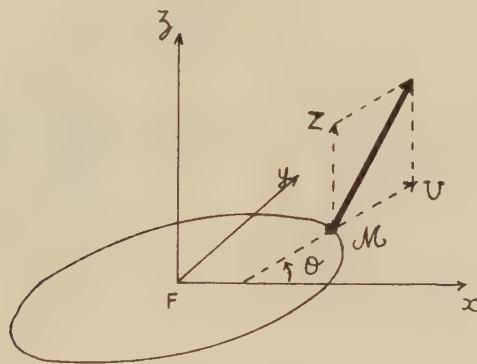
$$\Delta j_y = Z \sin \alpha \cdot \Delta C$$

$$\Delta a = 2U \sin (\theta - \alpha) \cdot \Delta C$$

$$\Delta e_x = [U \sin \alpha \cos (\theta - \alpha) + 2U \cos \alpha \sin (\theta - \alpha)] \cdot \Delta C$$

$$\Delta e_y = [-U \cos \alpha \cos (\theta - \alpha) + 2U \sin \alpha \sin (\theta - \alpha)] \cdot \Delta C$$

La convexisation du domaine mono-impulsionnel se pratique alors au moyen de l'Hamiltonien.



$$U^2 + Z^2 = 1$$

fig. 35

La relation

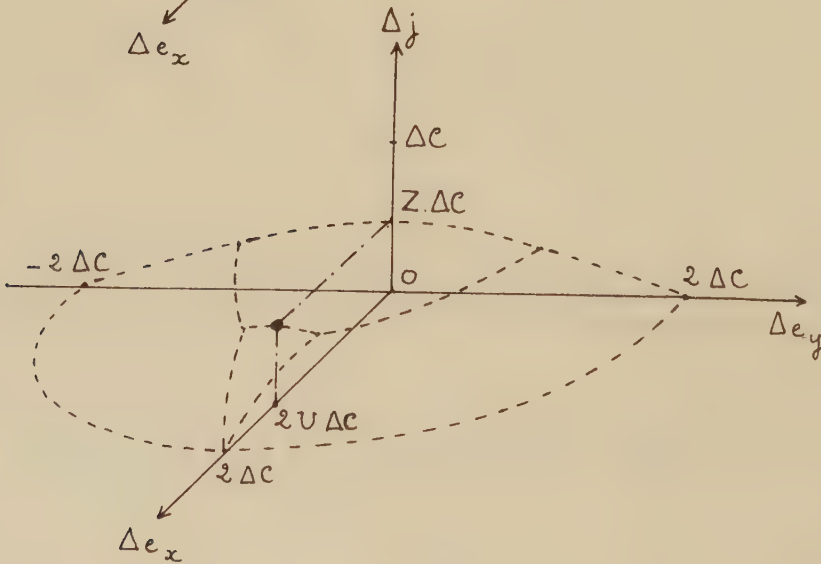
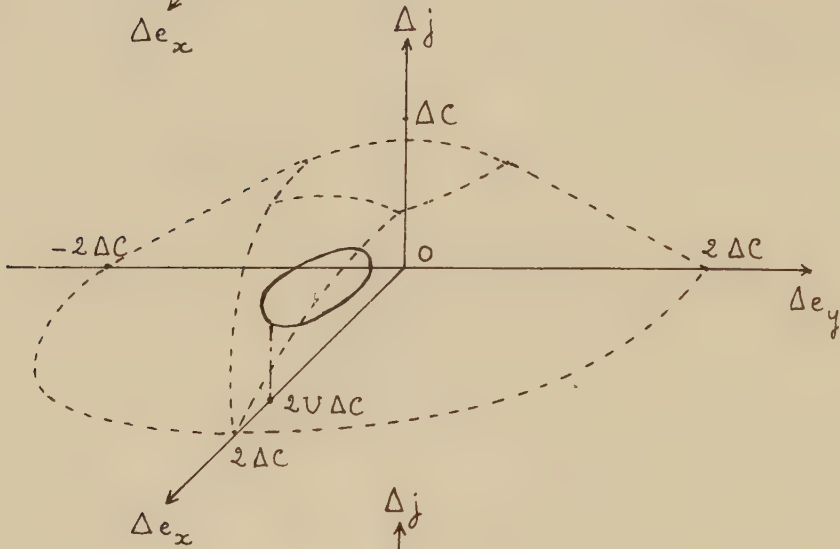
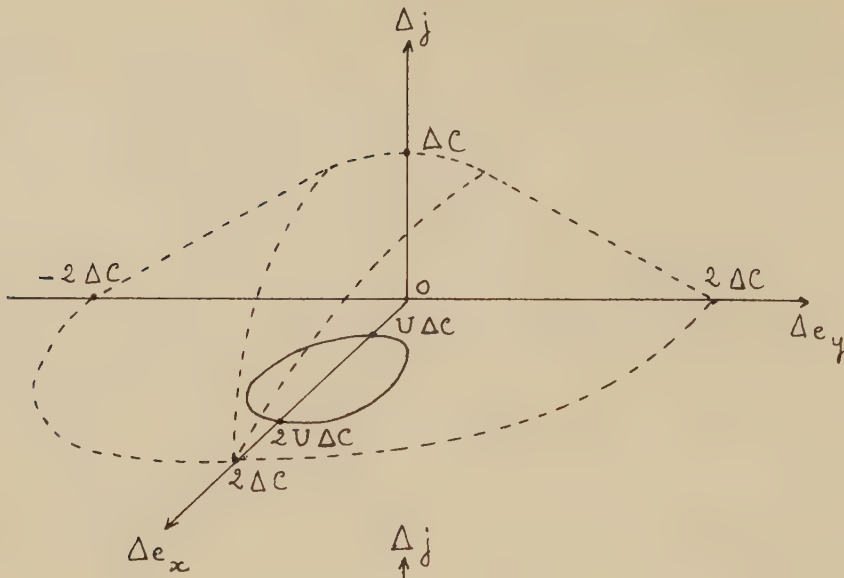
$$\Delta a = \frac{2U}{Z} [\sin \theta \cdot \Delta j_x - \cos \theta \cdot \Delta j_y]$$

nous indique immédiatement que la capacité de correction du propulseur à direction fixe est extrêmement faible puisque limitée aux variations vérifiant cette relation.

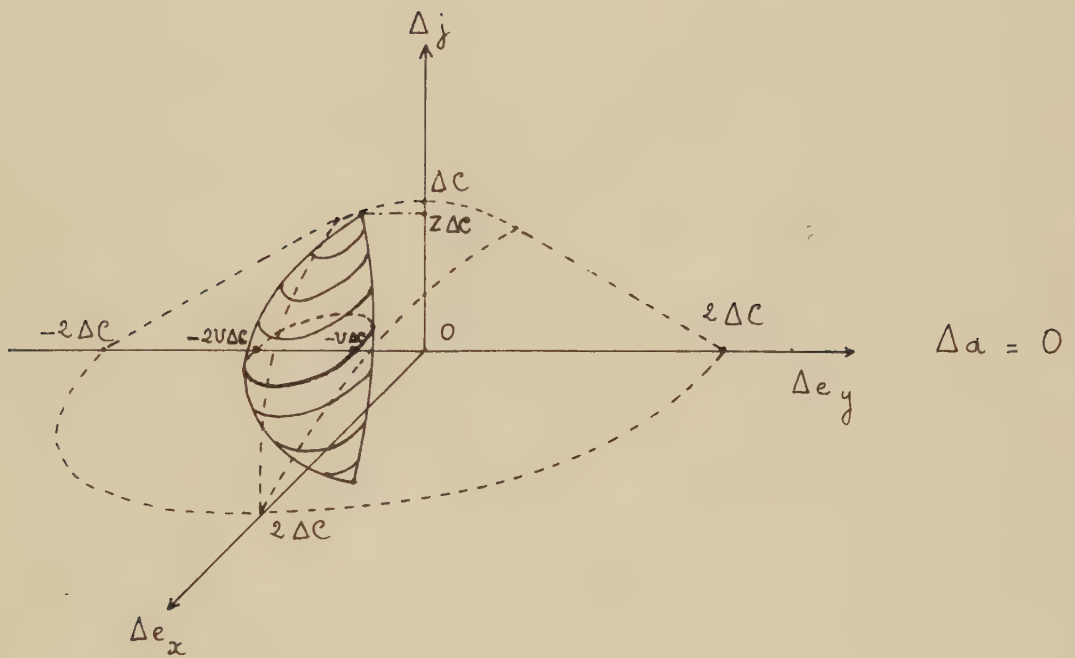
Les représentations des domaines accessibles dans les cas $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 0$ confirment les faibles possibilités d'un tel système (planches 5 et 6), comparées avec celles du propulseur orientable (en pointillés).

Un propulseur à direction fixe

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



Un propulseur à direction fixe
 $\theta = 0$



III.2.5 Deux propulseurs en opposition à direction fixe

L'étude détaillée en est faite dans l'Annexe 2 et permet de constater le peu d'utilité d'un tel système . En effet, la relation :

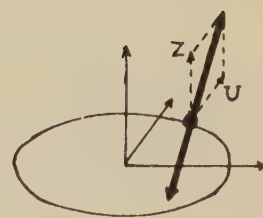
$$\Delta a = \frac{2U}{Z} \left[\sin \theta . \Delta j_x - \cos \theta . \Delta j_y \right]$$

lie les corrections de demi-grand axe et celles d'inclinaison de la même façon qu'avec un seul propulseur à direction fixe.

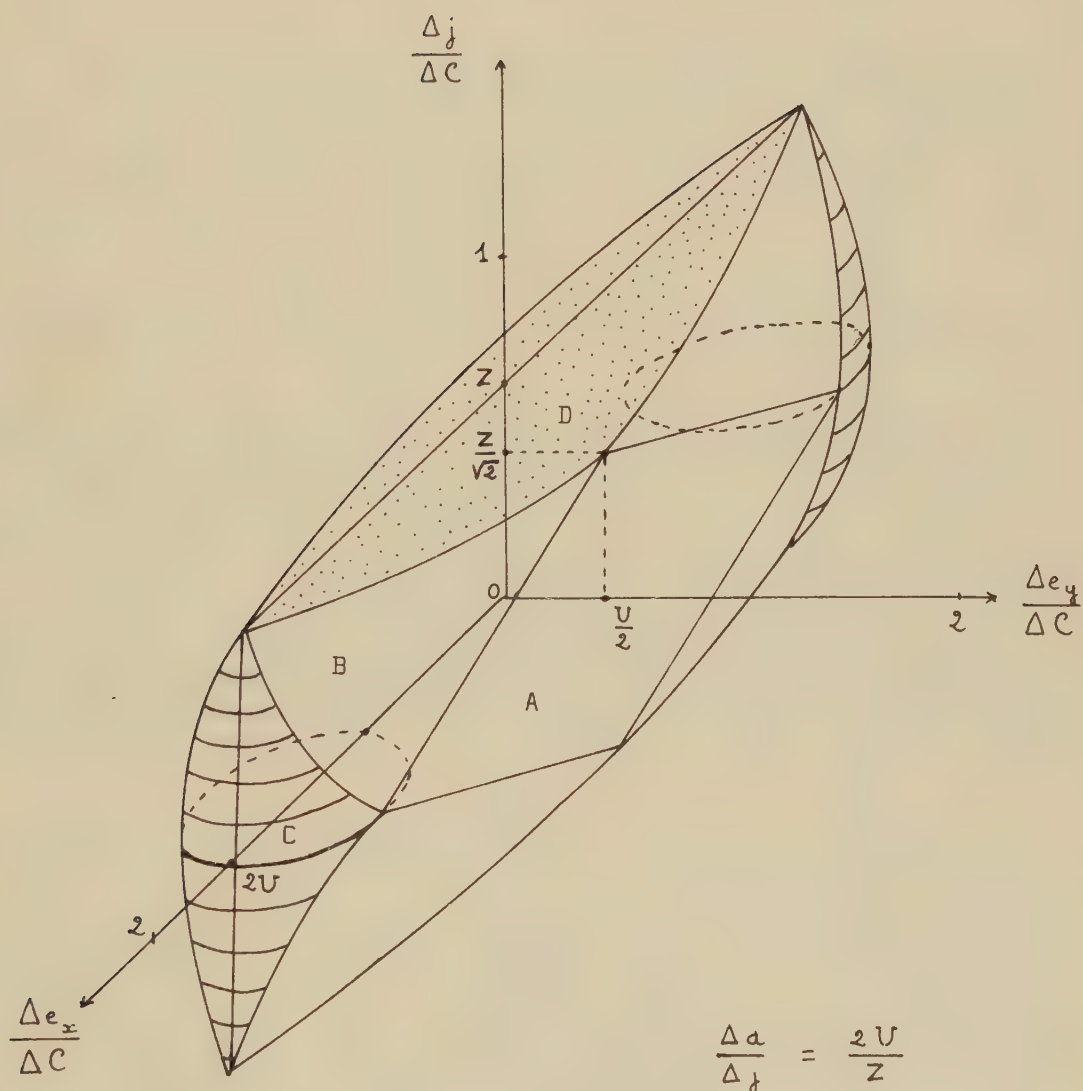
Aussi, l'intérêt de cet ensemble de propulseurs est mince, et nous ne représenterons son domaine accessible qu'à titre purement indicatif (dans le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$) (planche 7).

Deux propulseurs en opposition à direction fixe

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



$$U^2 + Z^2 = 1$$



III.3 Rendez-vous de longue durée

Les difficultés que présentent les problèmes de rendez-vous viennent du fait qu'aux 5 éléments orbitaux utilisés dans un transfert s'ajoute un 6^{ème} paramètre : σ , l'ascension droite moyenne de l'époque, dont la donnée est équivalente à celle du temps (la position étant définie par α).

Les équations relatives au rendez-vous sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d_j x}{dC} &= \cos \alpha \cdot Z \\ \frac{d_j y}{dC} &= \sin \alpha \cdot Z \\ \frac{da}{dC} &= 2Y \\ \frac{de_x}{dC} &= X \sin \alpha + 2Y \cos \alpha \\ \frac{de_y}{dC} &= -X \cos \alpha + 2Y \sin \alpha \\ \frac{d\sigma}{dC} &= -2X + 3\alpha Y\end{aligned}$$

La forme même de cette dernière équation indique la nécessité d'introduire une donnée supplémentaire : la durée du rendez-vous. Aussi, pour qu'on puisse poursuivre analytiquement la résolution de ce problème, il faut supposer que les rendez-vous sont de longue durée, c'est-à-dire que l'angle de transfert ($\alpha_f - \alpha_o$) est $\gg 2\pi$, et adopter les simplifications suivantes (utilisées par MAREC [5]) :

Si on admet sur la solution une erreur relative non plus d'ordre ξ (issue de la linéarisation des équations des perturbations) mais d'ordre $\max(\xi, \frac{1}{\alpha_f - \alpha_o})$, la dernière des équations du système précédent peut s'écrire

$$\frac{d\sigma}{dC} = 3\alpha Y \simeq 3(2k\pi) Y$$

avec $\alpha_f - \alpha_o = 2N\pi$, où k indique le numéro du tour et N le nombre total de tours.

Il est alors commode de prendre comme 6^{ème} variation, non pas $\Delta\sigma$, mais

$$\Delta u = -\frac{4}{3} \frac{\Delta\sigma}{\alpha_f - \alpha_o} + \Delta a$$

et la 6^{ème} équation se présente sous la forme

$$\frac{du}{dC} = -\frac{4}{3(\alpha_f - \alpha_o)} \frac{d\sigma}{dC} + \frac{da}{dC}$$

soit

$$(1) \quad \boxed{\frac{du}{dC} = \left(1 - \frac{2k}{N}\right) \frac{da}{dC}}$$

De même que pour les transferts, il convient de rechercher le domaine accessible, c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace à 5 dimensions ($\Delta_j y = 0$) : Δj , Δa , Δe_x , Δe_y , Δu qu'il est possible d'atteindre avec une vitesse caractéristique ΔC .

Si un ensemble de propulseurs est capable d'effectuer la correction $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta j, \Delta a, \Delta u$, en changeant la position des points d'application et l'orientation de la poussée, il est possible de réaliser les corrections suivantes

Δe_x	Δe_y	Δj	Δa	Δu	α	k	X	Y	Z
			$-\Delta a$		$\pi + \alpha$	k	$-X$	$-Y$	$-Z$
				$-\Delta u$	α	$N - k$	X	Y	Z

Seuls, les ensembles de propulseurs à direction fixe envisagés en III.2.4 et III.2.5 ne permettent pas de réaliser ces changements, Δj et Δa étant linéairement dépendants. Cependant, pour ces 2 ensembles, le calcul peut être poursuivi en excluant Δj du raisonnement, c'est-à-dire en supposant que les corrections sont effectuées dans l'espace des variations $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta a, \Delta u$.

Ainsi, il est possible de traiter globalement pour tous les ensembles de propulseurs le problème des rendez-vous de longue durée et de montrer comment leurs capacités à effectuer des transferts et des rendez-vous sont liées l'une à l'autre. Toutefois, pour en faciliter la compréhension, cette étude sera accompagnée d'un exemple d'application où le domaine accessible est commode à représenter : l'ensemble composé d'un propulseur perpendiculaire au plan de l'orbite et d'un propulseur orientable dans le plan de l'orbite.

Nous allons d'abord chercher à définir dans l'espace $\Delta a, \Delta u, \Delta C$, l'ensemble des points accessibles, les variations $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta j$ (dans le cas des propulseurs à direction fixe : $\Delta e_x, \Delta e_y$) étant fixées. Cela suppose que ΔC soit supérieure ou égale à la vitesse caractéristique $\Delta C_{\min}$ nécessaire pour produire les variations $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta j$ représentées ci-dessous par le point M (fig. 36).

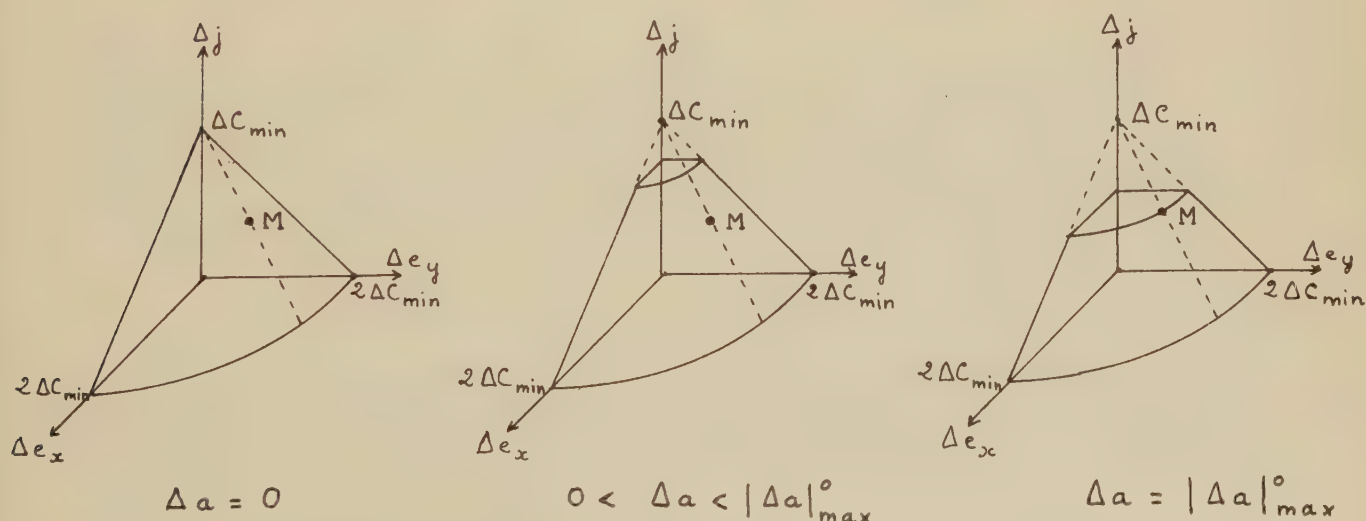


fig. 36

Avec l'ensemble de propulseurs envisagé, on doit avoir :

$$\Delta C \geq \Delta C_{\min} = |\Delta j| + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}$$

Il existe, associée à ΔC , une valeur $|\Delta a|_{\max}$ de Δa qui, avec l'exemple choisi (fig. 37), est égale à :

$$|\Delta a|_{\max} = 2 \Delta C - 2 |\Delta j|$$

Ainsi, cette valeur $|\Delta a|_{\max}$ est une fonction de ΔC et, lorsque $\Delta C = \Delta C_{\min}$, est égale à $|\Delta a|_{\max}^0$

$$|\Delta a|_{\max}^0 = 2 \Delta C_{\min} - 2 |\Delta j| = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}$$

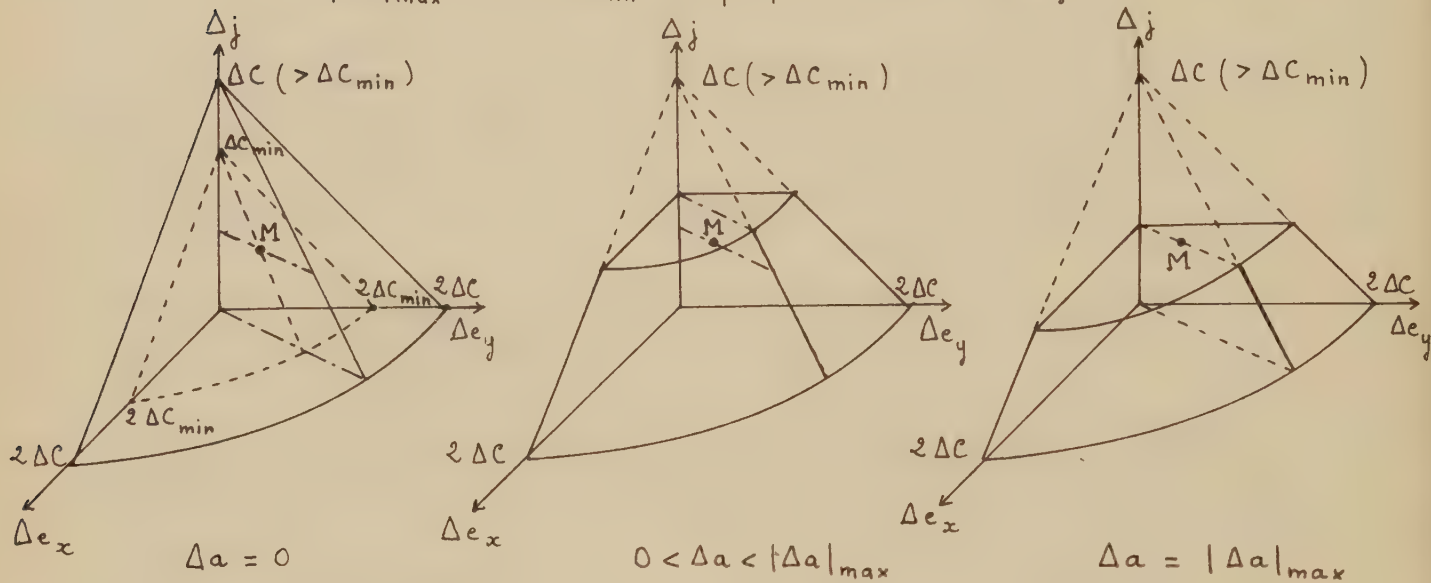


fig. 37

Recherchons maintenant le domaine accessible, dans le plan Δa , Δu , avec une vitesse caractéristique donnée ΔC . Ce domaine est nécessairement contenu dans la bande

$$|\Delta a|_{\max} \leq \Delta a \leq |\Delta a|_{\max}$$

Etant donné qu'avec la même vitesse caractéristique il est possible de changer le signe de Δa sans toucher à celui des autres variations, $|\Delta a|_{\max}$ ne peut être que le résultat de plusieurs impulsions provoquant des variations Δa positives. De même $-|\Delta a|_{\max}$ est le résultat de plusieurs impulsions provoquant des Δa toutes négatives.

Comme l'équation (1) entraîne

$$|\Delta u| \leq |\Delta a|$$

on a

$$|\Delta u|_{\max} \leq |\Delta a|_{\max}$$

Le domaine est donc également contenu dans la bande

$$-|\Delta a|_{\max} \leq \Delta u \leq |\Delta a|_{\max}$$

En choisissant convenablement le numéro k des tours d'orbite ($k = 0$ ou $k = N$), il est possible d'avoir pour chaque impulsion :

$$\Delta u = \pm \Delta a$$

sans changer la valeur des autres variations.

Aussi, lorsqu'à l'aide de multi-impulsions on obtient :

$$|\Delta a|_{\max}, \text{ on peut avoir } \begin{cases} \Delta u = |\Delta a|_{\max} \\ \Delta u = -|\Delta a|_{\max} \end{cases}$$

$$-|\Delta a|_{\max}, \text{ on peut avoir } \begin{cases} \Delta u = |\Delta a|_{\max} \\ \Delta u = -|\Delta a|_{\max} \end{cases}$$

Par composition de ces 4 types de multi-impulsions, il est possible d'atteindre, avec une vitesse caractéristique donnée ΔC , tous les points du domaine

$$\begin{array}{l} - |\Delta a|_{\max} \leq \Delta a \leq |\Delta a|_{\max} \\ - |\Delta a|_{\max} \leq \Delta u \leq |\Delta a|_{\max} \end{array}$$

On peut alors représenter l'ensemble des points accessibles dans l'espace $\Delta a, \Delta u, \Delta C$ (fig. 38).

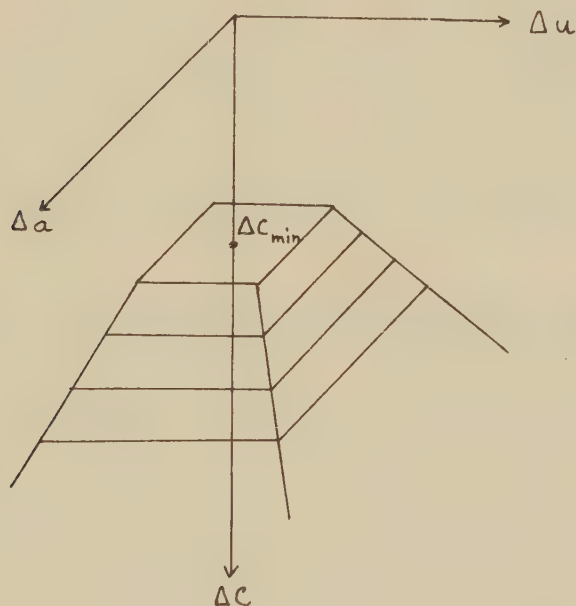


fig. 38

Dans la plupart des cas, la solution optimale n'est pas unique et dégénère en un grand nombre de solutions.

Nous laisserons de côté l'étude des dégénérescences, car elle est longue et d'un intérêt restreint ; par contre, nous retiendrons que, dans le cas des rendez-vous de longue durée, les domaines accessibles des rendez-vous s'obtiennent aisément à partir de ceux des transferts et que ces derniers suffisent pour qu'il soit possible de comparer les capacités de correction des divers ensembles de propulseurs.

IV. COMPARAISON ENTRE LES DIVERS ENSEMBLES DE PROPULSEURS =====

Pour effectuer cette comparaison, nous n'avons besoin de prendre en considération que les domaines accessibles (des divers ensembles de propulseurs) correspondant aux transferts. Ces domaines sont tous inclus dans celui du propulseur orientable. Nous allons les examiner successivement.

Propulseur librement orientable

Ce système est évidemment le meilleur du point de vue de la consommation, mais se révèle aussi le meilleur pour le nombre d'impulsions optimales (2 au maximum). Il permet d'effectuer tous les types de correction. Le seul inconvénient qui restreigne son utilisation réside dans la nécessité d'orienter le mobile avec précision, afin de donner la direction voulue à la poussée, manoeuvre toujours délicate et pratiquement impensable quand le mobile est stabilisé par rotation.

Propulseur orientable dans le plan horizontal

Ce système est très bon du point de vue de la consommation et du nombre d'impulsions optimales (2 au maximum). Son utilisation se trouve parfaitement justifiée pour un satellite dont, seul, l'axe de lacet est contrôlé au moyen de jets de gaz : sa capacité de correction excellente (tous types de correction réalisables) lui permet alors de remplacer le propulseur orientable de façon satisfaisante.

Ensemble composé d'un propulseur perpendiculaire au plan de l'orbite et d'un propulseur orientable (ou 2 propulseurs tangentiels) dans le plan de l'orbite

Cet ensemble possède une bonne capacité de correction, moins bonne cependant que celle des 2 systèmes précédents. Là également, tous les types de correction sont réalisables et les solutions optimales se composent de 3 impulsions au maximum. Son utilisation est impérative quand il s'agit d'un satellite spinné dont l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de l'orbite ; on place alors un propulseur le long de l'axe de rotation et un autre dans le plan de l'orbite. Cet ensemble est également très commode dans le cas d'un satellite stabilisé 3 axes , dont un des axes est pointé vers la terre : il suffit de placer un propulseur dans la direction perpendiculaire au plan de l'orbite et deux propulseurs en opposition le long de la tangente à l'orbite, pour avoir un système de correction d'orbite doté des mêmes possibilités que le précédent.

Propulseurs à direction fixe

Avec un seul propulseur à direction fixe, on s'attendait à une capacité de correction très faible : les calculs l'ont confirmé, en faisant apparaître une dépendance entre les corrections de demi-grand axe et d'inclinaison sous forme d'une relation linéaire. Avec deux propulseurs en opposition à direction fixe, cette dépendance s'est maintenue.

Mais, si ces deux propulseurs sont d'un intérêt extrêmement réduit lorsqu'il s'agit de corrections en dehors du plan de l'orbite, par contre ils peuvent se montrer valables pour des corrections dans le plan de l'orbite (les deux propulseurs étant alors placés dans ce plan). En effet, ils peuvent réaliser tous les types de variations $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta a$. Certains secteurs sont défavorisés du point de vue de la consommation (celle-ci pouvant être jusqu'à 4 fois plus élevée qu'avec un propulseur orientable). D'autres le sont très peu. Lorsqu'il est possible de prévoir approximativement la nature des corrections à effectuer, l'ensemble composé de ces deux propulseurs se montre intéressant, car il suffit de faire coïncider le secteur probable des corrections avec un secteur non défavorisé. Parfois, la procédure d'injection sur orbite d'un satellite autorise de telles prévisions.

CONCLUSION

La mise en évidence des contraintes imposées par certains systèmes de stabilisation a montré qu'il n'était pas toujours possible, ou que cela pouvait être coûteux du point de vue de la consommation, d'orienter librement des propulseurs installés à bord des satellites.

Ne pouvant négliger l'existence de ces contraintes dans une étude concernant des corrections impulsionsnelles optimales (du point de vue du coût en propulsif) d'orbites quasi-circulaires proches, on a envisagé des ensembles de propulseurs susceptibles, en tant que systèmes de correction d'orbite, de convenir à des satellites possédant des systèmes de stabilisation particuliers.

L'étude analytique des problèmes de correction d'orbite relatifs à de tels ensembles a révélé l'intérêt que présentent, d'une part, l'utilisation des "éléments orbitaux osculateurs" pour caractériser transferts et rendez-vous, et d'autre part, l'emploi du "domaine accessible" dont la représentation géométrique est particulièrement commode pour apprécier la capacité de correction. Elle a permis également de constater que les possibilités de ces ensembles en matière de rendez-vous de longue durée étaient facilement déductibles de leurs possibilités en matière de transfert.

Que ce soit pour des transferts ou des rendez-vous, la capacité de correction d'un propulseur orientable dans le plan perpendiculaire au rayon vecteur s'est avérée excellente, comparée avec celle du propulseur orientable. Cette capacité s'est aussi montrée bonne dans le cas d'un ensemble composé d'un propulseur placé perpendiculairement au plan de l'orbite et d'un autre orientable dans le plan de l'orbite, mais très mauvaise dans le cas de propulseurs à direction fixe (sauf pour des corrections dans le plan de l'orbite) .

Les enseignements que nous pouvons en tirer concernent la direction suivant laquelle il conviendrait d'orienter la recherche des systèmes de correction d'orbite des satellites spinnés : l'utilisation d'un ensemble composé d'un seul propulseur placé perpendiculairement à l'axe de rotation devrait permettre dans presque tous les cas (excepté lorsque l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de l'orbite) de réaliser tous les types de correction, les conditions de consommation dépendant de l'inclinaison de l'axe de rotation par rapport au plan de l'orbite ; il paraîtrait alors souhaitable pour réduire la consommation de disposer en plus deux propulseurs le long de l'axe de rotation.

REFERENCES

- [1] Y. THIRY.- Cours de Mécanique Céleste.- Faculté des Sciences de Paris (1967).
- [2] J.P. MAREC.- Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique (1968).
- [3] L.S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTYANSKII, R.V. GAMKRELIDZE and E.F. MISCHENKO.- The Mathematical Theory of Optimal Processes - Intersciences Publishers, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1962.
- [4] P. CONTENSOU.- Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation - Application au cas d'un centre d'attraction unique - Astronautica Acta, 8, (1962), p. 134-150. Symposium de l'Académie 1961.
- [5] J.P. MAREC.- Transferts optimaux entre orbites elliptiques proches. Publication O.N.E.R.A. n°121, (1967).
- [6] T.N. EDELBAUM.- Minimum Impulse Transfers in the Near Vicinity of a Circular Orbit - The Journal of the Astronautical Sciences, Vol XIV, No. 2, pp. 66-73 Mar.-Apr., 1967.
- [7] D.F. LAWDEN.- Optimal Trajectories for Space Navigation. (Butterworths Mathematical Texts, Butterworths, London 1963).
- [8] C. MARCHÁL.- Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires - Astronautica Acta, Vol. 11, 1965, N° 6.

*

*

ANNEXE 1

TRANSFERTS IMPULSIONNELS OPTIMAUX ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES , PROCHES , COPLANAIRES (PROPULSEUR ORIENTABLE)

La convexisation géométrique du domaine mono-impulsionnel n'est possible que si

- le domaine est défini dans un espace de dimension inférieure ou égale à 3 ,
- le domaine présente un certain nombre de symétries et des particularités géométriques.

Néanmoins, elle offre l'avantage de mettre en évidence les singularités et en facilite l'interprétation.

Un tel procédé trouve sa justification, par exemple , dans le cas où la poussée est librement orientable dans le plan de l'orbite (MARCHAL [8]).

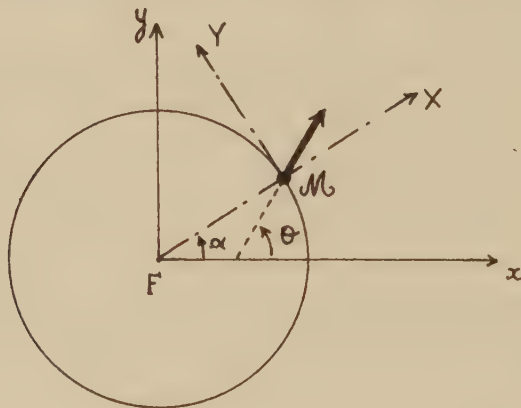


fig. 39

L'application d'une impulsion $\Delta C = \gamma \Delta \alpha$ dans la direction $-\theta$, en un point dont la position est repérée par α , provoque les variations :

$$\Delta a = 2 \Delta C \sin (\theta - \alpha)$$

$$\Delta e_x = \Delta C \sin \alpha \cos (\theta - \alpha) + 2 \Delta C \cos \alpha \sin (\theta - \alpha)$$

$$\Delta e_y = -\Delta C \cos \alpha \cos (\theta - \alpha) + 2 \Delta C \sin \alpha \sin (\theta - \alpha)$$

Pour une valeur de α déterminée, quand θ (direction de la poussée) varie de 0 à 2π , la courbe décrite par le point de coordonnées $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta a$ est une ellipse dont le demi-grand axe et l'excentricité sont indépendants de α (fig. 40) .

Le domaine mono-impulsionnel est engendré par cette ellipse qui , lorsque α varie, tourne autour de l'axe des Δa ; il constitue une partie d'un hyperboloïde de révolution comprise entre les plans $\Delta a = +2 \Delta C$ et $\Delta a = -2 \Delta C$.

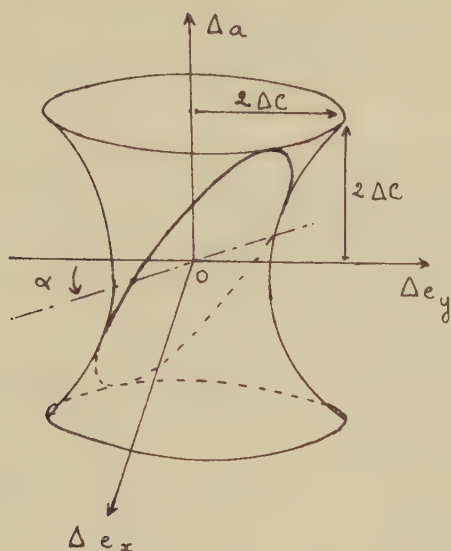


fig. 40

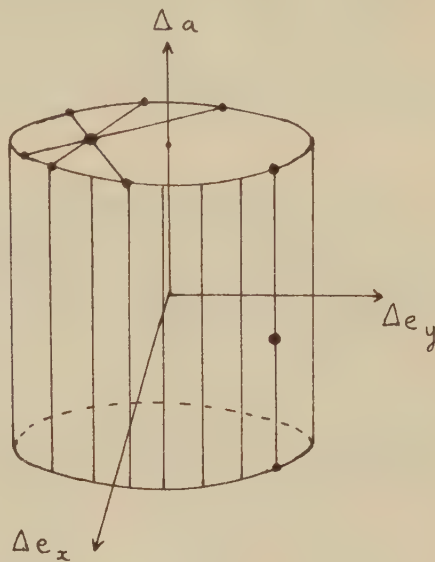


fig. 41

La convexisation de ce domaine s'effectue en le recouvrant d'une partie cylindrique et de 2 parties planes (fig. 41). Les solutions optimales sont alors :

- de type mono-impulsionnel pour les points appartenant aux deux circonférences :

$$\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 = 4 \Delta C^2 \quad \Delta a = \pm 2 \Delta C \quad , \text{ce qui}$$

correspond à des impulsions tangentes à l'orbite ;

- de type bi-impulsionnel (les 2 impulsions étant tangentes à l'orbite) pour les parties planes ainsi que pour la partie cylindrique :

- pour la partie cylindrique, les impulsions sont séparées par un demi-tour d'orbite ; l'une est accélératrice , l'autre est décélératrice et leur rapport fixe Δa .

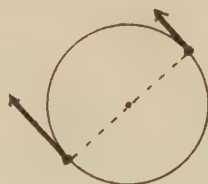


fig. 42

- pour les parties planes, il y a dégénérescence, un point pouvant être obtenu d'une infinité de façons au moyen de 2 (ou plus) impulsions tangentielles de même sens.



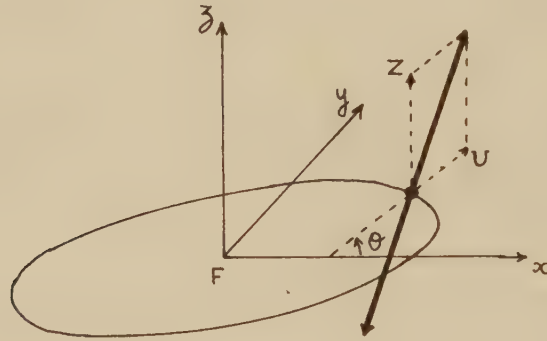
fig. 43

ANNEXE 2

TRANSFERTS IMPULSIONNELS OPTIMAUX ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES ,
PROCHES (PROPULSEURS EN OPPOSITION A DIRECTION FIXE)

La méthode de convexisation par l'Hamiltonien permet théoriquement de résoudre tous les problèmes de convexisation. Toutefois, elle est peu commode pour interpréter les singularités. L'exemple suivant, relatif aux transferts optimaux effectués au moyen de deux propulseurs en opposition à direction fixe, illustre parfaitement ses possibilités.

Avec cet ensemble de propulseurs, les cosinus directeurs de l'accélération de poussée dans le repère $Fxyz$: $\pm U \cos \theta$, $\pm U \sin \theta$, Z restent constants pendant la durée du transfert



$$U^2 + Z^2 = 1$$

fig. 44

L'application d'une impulsion $\Delta C = \gamma \Delta \alpha$ provoque alors les variations :

$$\Delta j_x = \pm Z \cos \alpha \cdot \Delta C$$

$$\Delta j_y = \pm Z \sin \alpha \cdot \Delta C$$

$$\Delta a = \pm [2U \sin \theta \cos \alpha - 2U \cos \theta \sin \alpha] \Delta C$$

$$\Delta e_x = \pm \left[\frac{U \sin \theta}{2} (3 + \cos 2\alpha) - \frac{U \cos \theta}{2} \sin 2\alpha \right] \Delta C$$

$$\Delta e_y = \pm \left[\frac{U \sin \theta}{2} \sin 2\alpha - \frac{U \cos \theta}{2} (3 - \cos 2\alpha) \right] \Delta C$$

Celles-ci sont affectées du signe + ou - suivant que l'un ou l'autre des deux propulseurs ait fourni l'impulsion. Immédiatement, on constate que la capacité de correction de cet ensemble est très faible, car les variations Δa , Δj_x et Δj_y sont linéairement dépendantes, la relation qui les lie étant la même qu'avec un propulseur unique à direction fixe ; la recherche des solutions optimales passe par la maximisation de l'Hamiltonien.

L'Hamiltonien associé au problème :

$$(1) \quad H(\alpha) = \pm \left[\frac{3p_{ex} U \sin \theta}{2} - \frac{3p_{ey} U \cos \theta}{2} + (p_{dx} Z + 2p_a U \sin \theta) \cos \alpha + (p_{dy} Z - 2p_a U \cos \theta) \sin \alpha + \left(\frac{p_{ex} U \sin \theta}{2} + \frac{p_{ey} U \cos \theta}{2} \right) \cos 2\alpha + \left(-\frac{p_{ex} U \cos \theta}{2} + \frac{p_{ey} U \sin \theta}{2} \right) \sin 2\alpha \right]$$

dépend de $5-1 = 4$ paramètres (p_{ex} , p_{ey} , $p_{dx} Z + 2p_a U \sin \theta$, $p_{dy} Z - 2p_a U \cos \theta$) au lieu des 5 paramètres classiques (p_{ex} , p_{ey} , p_{dx} , p_{dy} , p_a) à cause de la relation entre Δa , Δj_x , Δj_y . Sur un intervalle de 2π , il ne présente pas plus de 4 maxima (ou alors une infinité quand il est identiquement nul). Un transfert optimal peut être alors réalisé avec 4 impulsions ou moins. Cette maximisation présente un caractère particulier et assez original, $H(\alpha)$ pouvant se mettre sous la forme $H(\alpha) = \pm H_1(\alpha)$ et les maxima de $-H_1(\alpha)$ correspondant aux minima de $H_1(\alpha)$. Cependant, le principe en est le même, rechercher et comparer les maxima de $H(\alpha)$, que ce soit des points appartenant à $H_1(\alpha)$ ou $-H_1(\alpha)$.

On peut écrire :

$$H(\alpha) \equiv \pm \left[\frac{3p_{ex} U \sin \theta}{2} - \frac{3p_{ey} U \cos \theta}{2} + \mu \cos(\alpha - \alpha_e) + \nu \cos 2(\alpha - \omega) \right]$$

où μ , α_e , ν , ω ne dépendent que des composantes de l'adjoint. Posons

$$(2) \quad H_1(\alpha) = \frac{3p_{ex} U \sin \theta}{2} - \frac{3p_{ey} U \cos \theta}{2} + \mu \cos(\alpha - \alpha_e) + \nu \cos 2(\alpha - \omega)$$

$$(2') \quad H_2(\alpha) = -H_1(\alpha)$$

Sur une période, c'est-à-dire 2π , $H_1(\alpha)$ et $H_2(\alpha)$ présentent chacun 2 maxima et 2 minima.

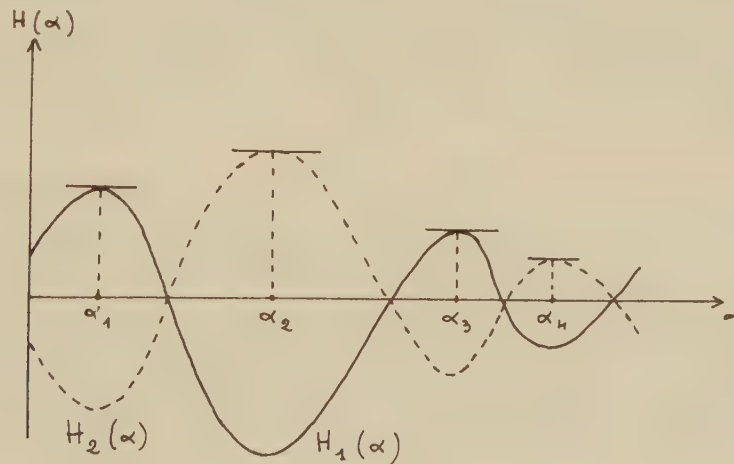


fig. 45

Les maxima de $H_1(\alpha)$ sont obtenus pour α_1 et α_3 , ceux de $H_2(\alpha)$ pour α_2 et α_4 . On rencontre des solutions optimales à n-impulsions ($n \leq 4$) quand $H(\alpha)$ présente n maxima de même valeur et d'autres maxima de valeur inférieure.

Les divers types de solutions optimales vont être étudiés successivement, en commençant par les quadri-impulsions.

Recherche des quadri-impulsions

Les solutions quadri-impulsionnelles sont obtenues quand $H(\alpha)$ présente 4 maxima de valeur identique :

$$H_1(\alpha_1) = H_1(\alpha_3) = H_2(\alpha_2) = H_2(\alpha_4)$$

La condition $H_1(\alpha_1) = H_1(\alpha_3)$ impose à $H_1(\alpha)$ de se mettre sous la forme

$$(3) \quad H_1(\alpha) \equiv C - k^2 [1 - \cos(\alpha - \alpha_1)] [1 - \cos(\alpha - \alpha_3)]$$

De même $H_2(\alpha_2) = H_2(\alpha_4)$ entraîne

$$(3') \quad H_2(\alpha) \equiv C' - k'^2 [1 - \cos(\alpha - \alpha_2)] [1 - \cos(\alpha - \alpha_4)]$$

Enfin, la relation $H_1(\alpha_1) = H_1(\alpha_3) = H_2(\alpha_2) = H_2(\alpha_4)$ entraîne

$$C' = C$$

L'identification des expressions (2) et (3) donne :

$$\begin{aligned} \frac{3 p_{ex} U \sin \theta}{2 \omega} - \frac{3 p_{ey} U \cos \theta}{2 \alpha_e} - C &= - \left(\frac{\mu^2}{8 \gamma} + \gamma \right) \\ &= (2p+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mu \neq 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Celle des expressions (2') et (3') donne :

$$\begin{aligned} - \frac{3 p_{ex} U \sin \theta}{2 \omega} + \frac{3 p_{ey} U \cos \theta}{2 \alpha_e} - C &= - \left(\frac{\mu^2}{8 \gamma} + \gamma \right) \\ &= p' \pi \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mu \neq 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en tire

$$p_{ex} \sin \theta = p_{ey} \cos \theta$$

Les 2 relations liant ω et α_e étant incompatibles, on ne peut avoir $\mu \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. Comme γ ne peut être nul, car $H(\alpha)$ ne présenterait plus que 2 maxima sur un intervalle de 2π , on en conclut :

$$\boxed{\mu = 0}$$

$$\text{et} \quad H(\alpha) = \mp \frac{p_{ex} U}{2 \cos \theta} \sin 2(\alpha - \theta)$$

Les 4 impulsions sont alors séparées par $1/4$ de révolution et sont fournies successivement par chaque propulseur en des positions symétriques par rapport à une direction qui fait un angle θ avec l'axe Fx .

Ainsi, lorsque $\frac{p_{ex}}{\cos \theta}$ est positif

$$\alpha_1 = \theta - \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha_3 = \theta + \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha_2 = \theta + \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha_4 = \theta + \frac{5\pi}{4}$$

Chaque impulsion est définie par sa position α_i , sa vitesse caractéristique $\Delta C_i = I_i \Delta C$ et par le propulseur qui la fournit : (U, Z) ou $(-U, -Z)$.

L'équation de la partie quadri-impulsionnelle du domaine accessible est donnée par le système suivant :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{Z} \frac{\Delta \delta x}{\Delta C} = (I_1 - I_3) \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) + (I_2 - I_4) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ \frac{1}{Z} \frac{\Delta \delta y}{\Delta C} = (I_1 - I_3) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) + (I_2 - I_4) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ \frac{\Delta a}{\Delta C} = \frac{2U}{Z} \sin \theta \frac{\Delta \delta x}{\Delta C} - \frac{2U}{Z} \cos \theta \frac{\Delta \delta y}{\Delta C} \\ \frac{2}{U} \frac{\Delta e_x}{\Delta C} = 3 \sin \theta (I_1 + I_3 - I_2 - I_4) + \cos \theta (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \\ \frac{2}{U} \frac{\Delta e_y}{\Delta C} = -3 \cos \theta (I_1 + I_3 - I_2 - I_4) + \sin \theta (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \end{cases}$$

avec $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 1$

En éliminant I_1, I_2, I_3, I_4 , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\Delta a}{\Delta C} = \frac{2U \sin \theta}{Z} \frac{\Delta \delta x}{\Delta C} - \frac{2U \cos \theta}{Z} \frac{\Delta \delta y}{\Delta C} \\ \frac{\Delta e_x}{\Delta C} \cos \theta + \frac{\Delta e_y}{\Delta C} \sin \theta = \frac{U}{2} \end{cases}$$

Ces deux équations ne suffisent pas pour déterminer la zone quadri-impulsionnelle ; les points utiles de l'hypersurface déterminée par ces deux équations sont ceux pour lesquels on a, dans les équations (4) :

$$I_1 \geq 0 \quad I_2 \geq 0 \quad I_3 \geq 0 \quad I_4 \geq 0$$

Une autre zone quadri-impulsionnelle correspond au cas où $\frac{\Delta e_x}{\cos \theta}$ est négatif. Elle est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\Delta a}{\Delta C} = \frac{2U \sin \theta}{Z} \frac{\Delta \delta x}{\Delta C} - \frac{2U \cos \theta}{Z} \frac{\Delta \delta y}{\Delta C} \\ \frac{\Delta e_x}{\Delta C} \cos \theta + \frac{\Delta e_y}{\Delta C} \sin \theta = -\frac{U}{2} \end{cases}$$

Les points de cette zone peuvent se déduire simplement des points de l'autre en ne changeant que le signe des coordonnées $\Delta e_x, \Delta e_y$.

Recherche des tri-impulsions

Pour ce type de solutions, $H(\alpha)$ doit présenter 3 maxima de valeur identique et un 4^{ème} maximum de valeur inférieure

$$H(\alpha_1) = H(\alpha_2) = H(\alpha_3) \geq H(\alpha_4)$$

Le domaine accessible admettant l'origine comme centre de symétrie, cela nous permet de n'étudier que le cas où $H_1(\alpha)$ prend la même valeur en 2 maxima. Alors

$$H_1(\alpha) \equiv C - k^2 \left[1 - \cos(\alpha - \alpha_1) \right] \left[1 - \cos(\alpha - \alpha_3) \right]$$

Les maxima de $H_2(\alpha)$ sont les minima de $H_1(\alpha)$; il leur correspond :

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \quad \alpha_4 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + \pi$$

α_1 et α_3 étant données à 2π près, α_2 est donné à π près; cette indétermination est levée par l'inégalité $H_2(\alpha_2) > H_2(\alpha_4)$; au 3^{ème} maximum ne correspond $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$ que si $\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} < 0$

Pour que $H(\alpha)$ possède 3 maxima de même valeur, il est nécessaire que soit vérifiée la relation :

$$3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3) = \cos^2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}\right)$$

L'équation de cette zone tri-impulsionnelle est alors donnée par le système :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 1$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\Delta j_x}{\Delta C} = I_1 \cos \alpha_1 + I_3 \cos \alpha_3 - I_2 \cos \alpha_2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\Delta j_y}{\Delta C} = I_1 \sin \alpha_1 + I_3 \sin \alpha_3 - I_2 \sin \alpha_2$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta C} = \frac{2U}{Z} \sin \theta \frac{\Delta j_x}{\Delta C} - \frac{2U}{Z} \cos \theta \frac{\Delta j_y}{\Delta C}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{U} \frac{\Delta e_x}{\Delta C} &= \sin \theta \left[3(I_1 + I_3 - I_2) + I_1 \cos 2\alpha_1 + I_3 \cos 2\alpha_3 - I_2 \cos 2\alpha_2 \right] \\ &\quad - \cos \theta \left[I_1 \sin 2\alpha_1 + I_3 \sin 2\alpha_3 - I_2 \sin 2\alpha_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{U} \frac{\Delta e_y}{\Delta C} &= \sin \theta \left[I_1 \sin 2\alpha_1 + I_3 \sin 2\alpha_3 - I_2 \sin 2\alpha_2 \right] \\ &\quad - \cos \theta \left[3(I_1 + I_3 - I_2) - I_1 \cos 2\alpha_1 - I_3 \cos 2\alpha_3 + I_2 \cos 2\alpha_2 \right] \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$$

$$3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3) = \cos^2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}\right)$$

$$I_1 \geq 0 \quad I_2 \geq 0 \quad I_3 \geq 0$$

Les autres zones tri-impulsionnelles s'obtiennent à partir de celle-ci par symétrie par rapport à l'origine.

Recherche des bi-impulsions

Elles peuvent être de 2 types : impulsions de mêmes directions, impulsions de directions opposées.

Les zones atteintes avec des solutions du 1^{er} type sont identiques à celles obtenues avec un seul propulseur, mais sont limitées par les inégalités

$$\begin{array}{lll} H_1(\alpha_1) > H_2(\alpha_2) & H_1(\alpha_1) > H_2(\alpha_4) & \text{quand } H_1(\alpha_1) = H_1(\alpha_3) \\ H_2(\alpha_2) > H_1(\alpha_1) & H_2(\alpha_2) > H_1(\alpha_3) & \text{quand } H_2(\alpha_2) = H_2(\alpha_4) \end{array}$$

Les équations des zones atteintes au moyen de solutions de ce type sont données par le système :

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= 1 & I_1 &\geq 0 & I_2 &\geq 0 \\
 \pm \frac{1}{Z} \frac{\Delta j_x}{\Delta C} &= I_1 \cos \alpha_1 + I_2 \cos \alpha_2 \\
 \pm \frac{1}{Z} \frac{\Delta j_y}{\Delta C} &= I_1 \sin \alpha_1 + I_2 \sin \alpha_2 \\
 \frac{\Delta a}{\Delta C} &= \frac{2U \sin \theta}{Z} \frac{\Delta j_x}{\Delta C} - \frac{2U \cos \theta}{Z} \frac{\Delta j_y}{\Delta C} \\
 \pm \frac{2}{U} \frac{\Delta e_x}{\Delta C} &= \sin \theta (3 + I_1 \cos 2\alpha_1 + I_2 \cos 2\alpha_2) - \cos \theta (I_1 \sin 2\alpha_1 + I_2 \sin 2\alpha_2) \\
 \pm \frac{2}{U} \frac{\Delta e_y}{\Delta C} &= \sin \theta (I_1 \sin 2\alpha_1 + I_2 \sin 2\alpha_2) - \cos \theta (3 - I_1 \cos 2\alpha_1 - I_2 \cos 2\alpha_2)
 \end{aligned}$$

Les équations des zones atteintes au moyen de solutions du 2^{ème} type sont :

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= 1 \\
 \frac{1}{Z} \frac{\Delta j_x}{\Delta C} &= I_1 \cos \alpha_1 - I_2 \cos \alpha_2 \\
 \frac{1}{Z} \frac{\Delta j_y}{\Delta C} &= I_1 \sin \alpha_1 - I_2 \sin \alpha_2 \\
 \frac{\Delta a}{\Delta C} &= \frac{2U \sin \theta}{Z} \frac{\Delta j_x}{\Delta C} - \frac{2U \cos \theta}{Z} \frac{\Delta j_y}{\Delta C} \\
 \frac{2}{U} \frac{\Delta e_x}{\Delta C} &= \sin \theta [3(I_1 - I_2) + I_1 \cos 2\alpha_1 - I_2 \cos 2\alpha_2] - \cos \theta [I_1 \sin 2\alpha_1 - I_2 \sin 2\alpha_2] \\
 \frac{2}{U} \frac{\Delta e_y}{\Delta C} &= \sin \theta [I_1 \sin 2\alpha_1 - I_2 \sin 2\alpha_2] - \cos \theta [3(I_1 - I_2) - I_1 \cos 2\alpha_1 + I_2 \cos 2\alpha_2]
 \end{aligned}$$

Elles sont limitées par les inégalités

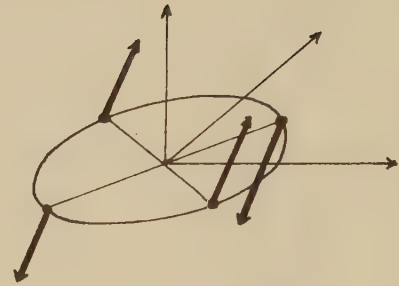
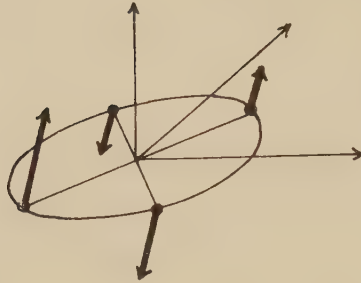
$$\begin{aligned}
 H_1(\alpha_1) &> H_1(\alpha_3) & H_2(\alpha_2) &> H_2(\alpha_4) \\
 I_1 &\geq 0 & I_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Recherche des mono-impulsions

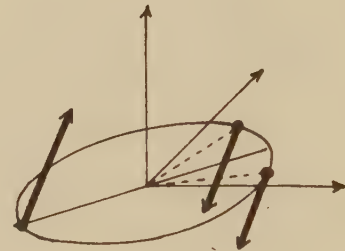
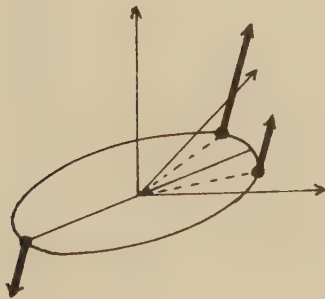
Les mono-impulsions optimales sont identiques à celles du système à un propulseur à direction fixe.

Pour la représentation des solutions optimales et du domaine accessible, nous avons choisi le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ligne des noeuds étant prise comme axe de référence F_x ($\Delta j_y = 0$) ; le domaine est alors représenté par sa projection dans l'espace à 3 dimensions $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta j$ (planche 9). La planche 8 nous montre les types de solutions correspondant aux diverses surfaces qui constituent la frontière du domaine.

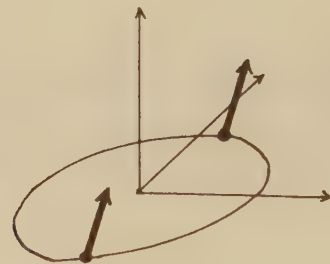
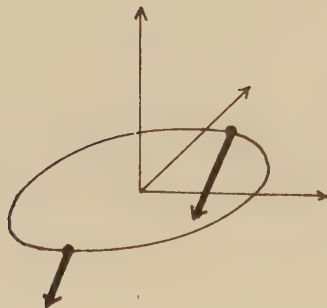
- type A (quadri-impulsionnel)



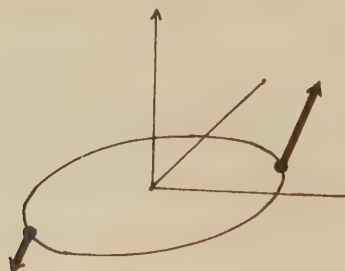
- type B (tri-impulsionnel)



- type C (bi-impulsionnel) : impulsions dans le même sens

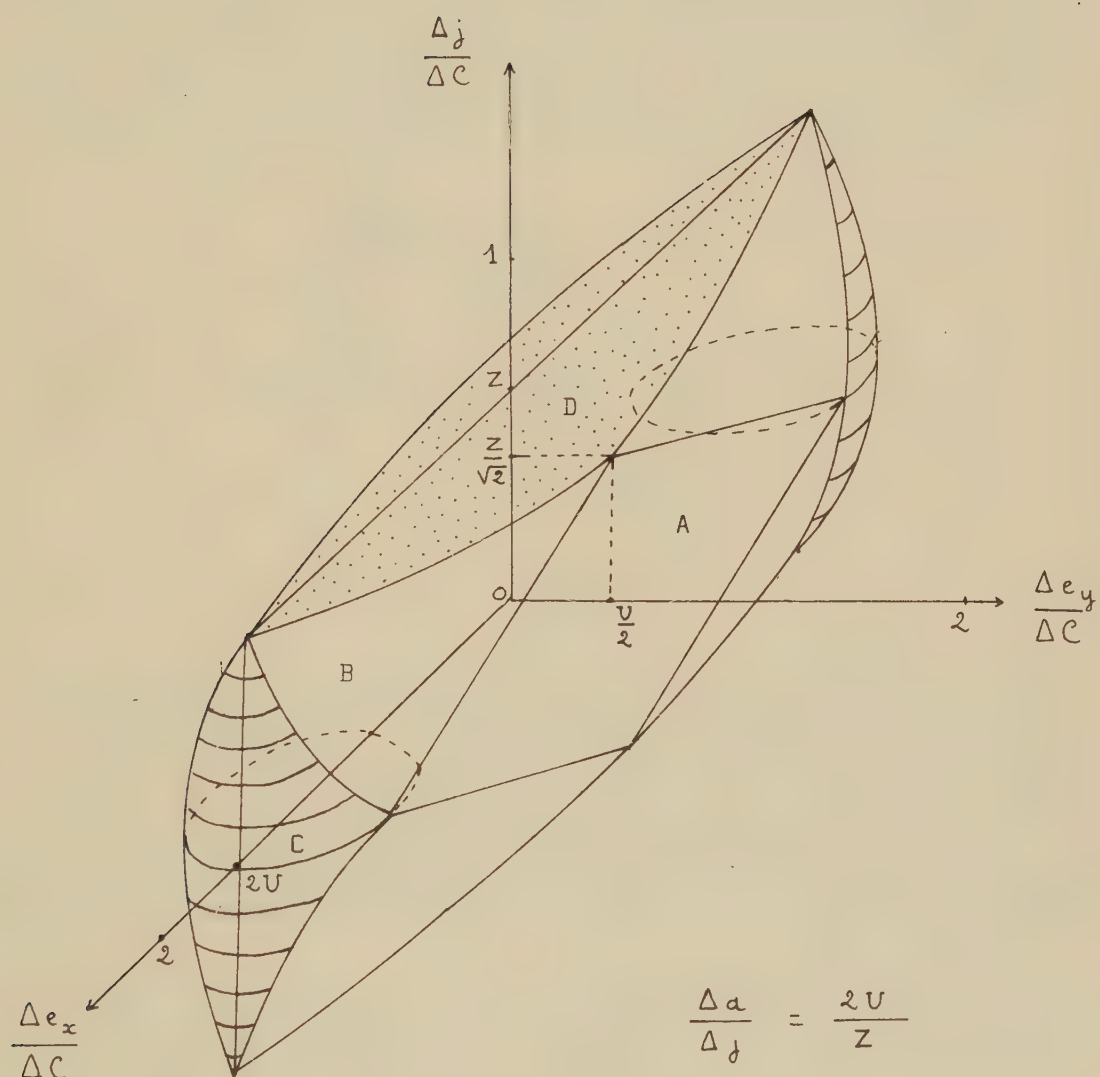


- type D (bi-impulsionnel) : impulsions de sens contraires



Deux propulseurs en opposition à direction fixe

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



ANNEXE 3

TRANSFERTS IMPULSIONNELS OPTIMAUX ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES ,
PROCHES (PROPULSEUR ORIENTABLE DANS LE PLAN HORIZONTAL)

Le plan horizontal (local) est le plan $Y\mathcal{M}Z$; la poussée est librement orientable dans ce plan, perpendiculaire au rayon vecteur $\overrightarrow{F\mathcal{M}}$ (φ caractérisant l'angle de $\overrightarrow{\delta}$ avec $\mathcal{M}Y$).

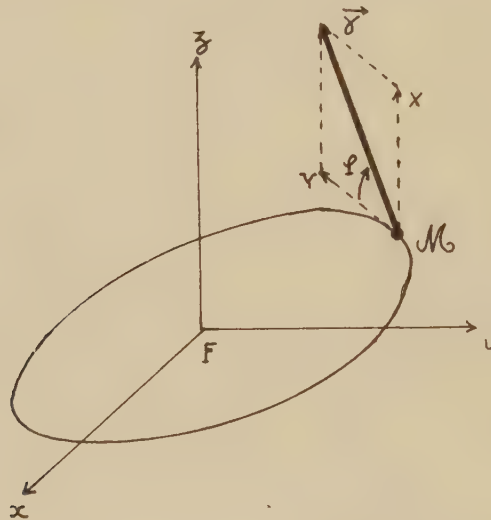


fig. 46

Les composantes de $\overrightarrow{p_v}$ dans les axes mobiles étant connues et les contraintes auxquelles est soumise l'accélération de la poussée étant aisément exprimables dans ces mêmes axes, il est commode de rechercher la direction optimale de la poussée $\overrightarrow{D^*}$ pour laquelle $\overrightarrow{p_v} \cdot \overrightarrow{D}$ est maximum : comme $\overrightarrow{\delta}$ est contrainte d'appartenir au plan $Y\mathcal{M}Z$, la direction optimale $\overrightarrow{D^*}$ est celle de la projection de $\overrightarrow{p_v}$ sur ce plan.

Si $\overrightarrow{\mathcal{M}P} = \overrightarrow{p_v}$ et si P_1 est la projection de P sur le plan $Y\mathcal{M}Z$, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D^*} &= \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}P_1}}{\mathcal{M}P_1} \\ \overrightarrow{p_v} \cdot \overrightarrow{D^*} &= \mathcal{M}P_1 \end{aligned}$$

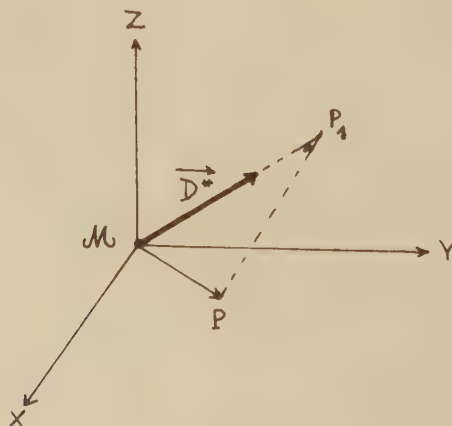


fig. 47

Les coordonnées de P_1 sont :

$$(1) \quad \begin{aligned} Y &= 2 p_a + 2 p_e \cos (\alpha - \alpha_e) \\ Z &= p_d \cos (\alpha - \alpha_d) \end{aligned}$$

$p_a, p_e, p_d, \alpha_e, \alpha_d$ restant constants pendant la durée du transfert, le lieu de P_1 est une ellipse centrée au point ω_1 ($Y = 2 p_a, Z = 0$). Cette ellipse est entièrement décrite lorsque le mobile effectue une révolution.

Les positions optimales d'impulsions correspondent à un (ou plusieurs) maximum de $\vec{p}_V \cdot \vec{D}^*$; ce ou ces maximum peuvent être choisis égaux à 1, $\vec{p}_V$ étant défini à un facteur multiplicatif près, ce qui signifie que l'ellipse (P_1) est intérieure à un cercle (Σ) de centre M et rayon 1 et lui est tangente en un ou plusieurs points (fig. 48).

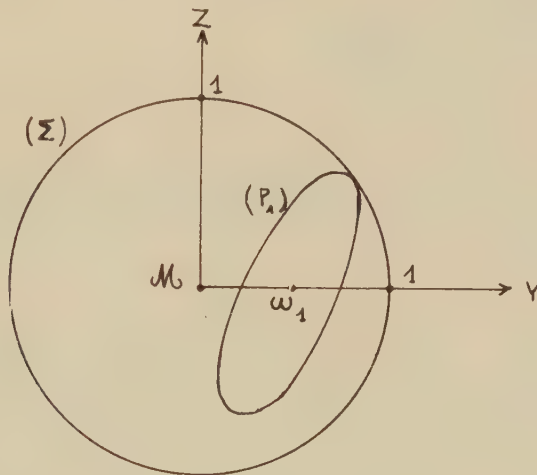


fig. 48

Le nombre des points de contact ne dépasse pas 2 sauf lorsque l'ellipse et le cercle sont confondus. Chaque point de tangence fournit alors le point d'application de l'impulsion et la direction optimale de la poussée.

Suivant le nombre des points de contact et leur position (sur le cercle (Σ) ou l'ellipse (P_1)), on a plusieurs types de solutions optimales. A chacun de ces types correspond une partie du domaine accessible dont on peut rechercher l'équation, sachant qu'une impulsion de vitesse caractéristique ΔC produit les variations :

$$\Delta j_x = Z \cos \alpha \cdot \Delta C$$

$$\Delta j_y = Z \sin \alpha \cdot \Delta C$$

$$\Delta a = 2 Y \cdot \Delta C$$

$$\Delta e_x = 2 Y \cos \alpha \cdot \Delta C$$

$$\Delta e_y = 2 Y \sin \alpha \cdot \Delta C$$

avec $Y = \cos \varphi$ $Z = \sin \varphi$

Les solutions optimales appartiennent aux types suivants :

- Type I' (bi-impulsionnel), lorsque l'ellipse (P_1) est bitangente à (Σ) en deux points symétriques par rapport à M_0Y (fig. 49) :

- $p_a \neq 0$
- $\vec{p}_e$ et $\vec{p}_j$ perpendiculaires

Pour les 2 impulsions numérotées 1 et 2, on a :

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 \\ Z_2 &= -Z_1 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 &= \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 &= -\sin \varphi_1 \end{aligned}$$

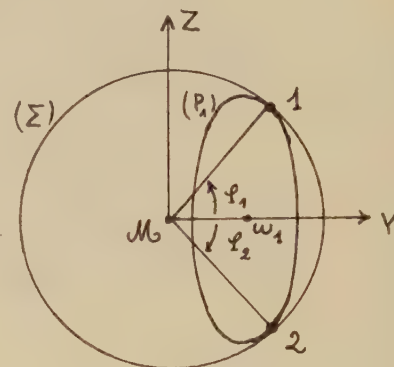


fig. 49

Si $\Delta C_1 = I_1 \Delta C$ et $\Delta C_2 = I_2 \Delta C$ ($I_1 + I_2 = 1$) sont respectivement les vitesses caractéristiques des impulsions 1 et 2, l'équation de la partie du domaine accessible correspondant au type I' est donnée par le système :

$$\frac{\Delta j_x}{\Delta C} = \sin \varphi_1 (I_1 \cos \alpha_1 - I_2 \cos \alpha_2)$$

$$\frac{\Delta j_y}{\Delta C} = \sin \varphi_1 (I_1 \sin \alpha_1 - I_2 \sin \alpha_2)$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta C} = 2 \cos \varphi_1 (I_1 + I_2)$$

$$\frac{\Delta e_x}{\Delta C} = 2 \cos \varphi_1 (I_1 \cos \alpha_1 + I_2 \cos \alpha_2)$$

$$\frac{\Delta e_y}{\Delta C} = 2 \cos \varphi_1 (I_1 \sin \alpha_1 + I_2 \sin \alpha_2)$$

et $I_1 + I_2 = 1$

Lorsque la ligne des noeuds est prise comme axe de référence Fx ($\Delta j_y = 0$), l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1, I_1, I_2$ fournit l'équation

$$\left(\Delta C^2 - \frac{\Delta a^2}{4} \right) (\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 - \Delta a^2) + \Delta j^2 (\Delta a^2 - \Delta e_x^2) = 0$$

de la surface du 4^{ème} degré correspondant à ce type de solutions.

La représentation paramétrique, déduite des équations (1), du faisceau des ellipses bi-tangentes à (Σ) en 1 et 2 est du type :

$$Y = 2 p_a + 2 p_e \cos (\alpha - \alpha_e)$$

$$Z = p_j \sin (\alpha - \alpha_e)$$

A la limite, lorsque l'ellipse (P_1) tend vers le cercle (Σ) , cette représentation tend à devenir la suivante :

$$Y = \cos (\alpha - \alpha_e)$$

$$Z = \pm \sin (\alpha - \alpha_e)$$

Il apparaît alors qu'on a

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2 \varphi_1$$

Cette relation permet ainsi de séparer les surfaces du domaine accessible correspondant aux solutions de type I' de celles correspondant aux solutions de type III' que nous verrons plus loin .

Les points communs à ces deux surfaces vérifient l'équation

$$(4 \Delta C^2 - \Delta a^2)^2 = 4 \Delta j^2 (4 \Delta C^2 - \Delta e_x^2)$$

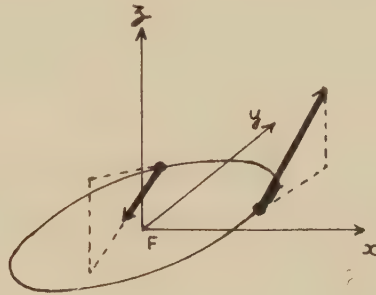


fig. 50

- Type I'bis ; c'est un cas particulier du type I' ($\Delta j = 0$) pour lequel $p_e = 0$, $p_j = 0$ et $2 p_a = \pm 1$
La poussée est tangentielle. Ce cas est singulier, car tout point de l'orbite peut convenir pour appliquer cette poussée.
Pour la recherche de la surface correspondante, il est plus commode de convexiser le domaine accessible. Cette convexisation montre alors que tout point de cette surface peut être atteint au moyen de 2 impulsions tangentielles.

- Type II' (bi-impulsionnel) quand p_a est nul et l'ellipse (P_1) bitangente à (Σ) ; les deux points de contact, 1 et 2, sont alors diamétralement opposés (fig. 32) et on a :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$$

$$Y_2 = - Y_1$$

$$Z_2 = - Z_1$$

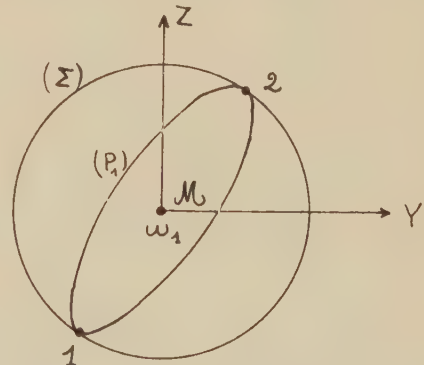


fig. 51

L'équation de la partie du domaine accessible correspondant aux solutions de type II' est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta j_x}{\Delta C} &= \sin \varphi_1 \cos \alpha_1 \\ \frac{\Delta j_y}{\Delta C} &= \sin \varphi_1 \sin \alpha_1 \\ \frac{\Delta a}{\Delta C} &= 2(I_1 - I_2) \cos \varphi_1 \\ \frac{\Delta e_x}{\Delta C} &= 2 \cos \varphi_1 \cos \alpha_1 \\ \frac{\Delta e_y}{\Delta C} &= 2 \cos \varphi_1 \sin \alpha_1\end{aligned}$$

La ligne des noeuds étant prise comme axe Fx ($\Delta j_y = 0$), on a

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = \pi$$

Les arcs d'ellipse

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e_y = 0 \\ \Delta j^2 + \frac{\Delta e_x^2}{4} = \Delta C^2 \\ |\Delta e_x| \geq |\Delta a| \end{array} \right.$$

correspondent alors aux solutions de type II'.

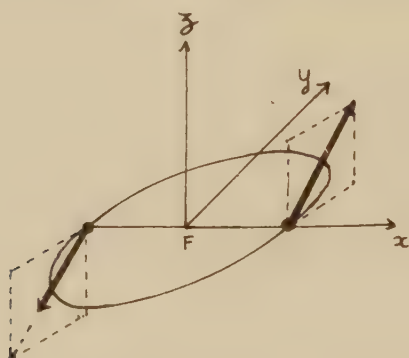


fig. 52

- Type III' (singulier) caractérisé par

- $p_a = 0$
- $p_j = 2 p_e = 1$
- $\alpha_j = \alpha_e \pm \frac{\pi}{2}$

Les coordonnées de P_1 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}Y &= \cos(\alpha - \alpha_e) \\ Z &= \pm \sin(\alpha - \alpha_e)\end{aligned}$$

et l'ellipse (P_1) est confondue avec le cercle (Σ). Il y a dégénérescence, tout point de l'orbite pouvant convenir pour appliquer la poussée ; cette poussée est bien déterminée en fonction de la position.

Une impulsion, de vitesse caractéristique ΔC , du type III' produit les variations :

$$\frac{\Delta j_x}{\Delta C} = \pm \cos \alpha \sin (\alpha - \alpha_e)$$

$$\frac{\Delta j_y}{\Delta C} = \pm \sin \alpha \sin (\alpha - \alpha_e)$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta C} = 2 \cos (\alpha - \alpha_e)$$

$$\frac{\Delta e_x}{\Delta C} = 2 \cos \alpha \cos (\alpha - \alpha_e)$$

$$\frac{\Delta e_y}{\Delta C} = 2 \sin \alpha \cos (\alpha - \alpha_e)$$

où α_e est un élément de l'adjoint cinématique orbital fixe.
De ces équations, on tire

$$\Delta e_y \mp 2 \Delta j_x = 2 \sin \alpha_e \Delta C$$

$$\Delta e_x \pm 2 \Delta j_y = 2 \cos \alpha_e \Delta C$$

Si on utilise des multi-impulsions du type III' dont la somme des vitesses caractéristiques est ΔC , ces relations restent vérifiées.

Une étude dans le domaine $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta a$ montre que tout point M peut y être atteint au moyen de bi-impulsions, et cela de deux façons différentes (fig. 53).

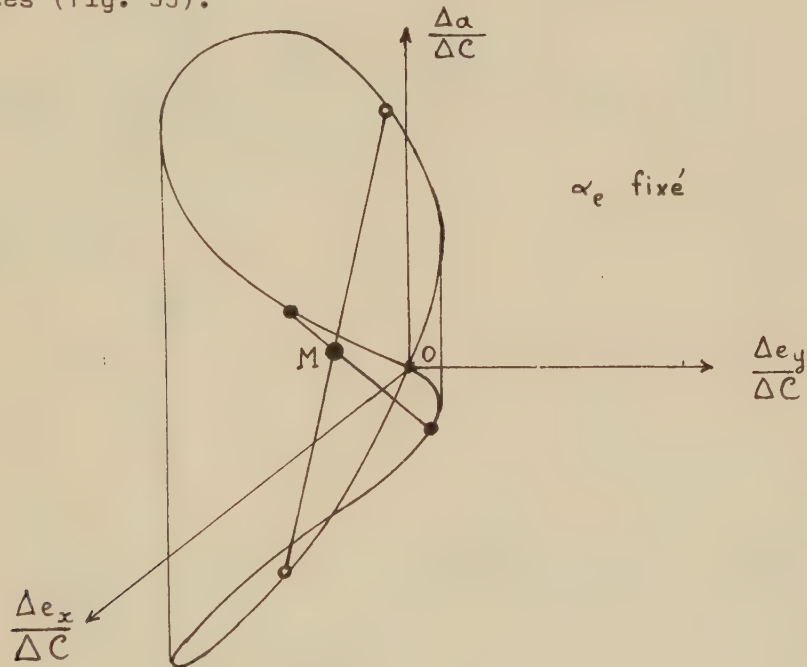


fig. 53

Avec $\Delta j_y = 0$ et en faisant varier α_e , on décrit le domaine correspondant à toutes les solutions de type III' ; son équation est la suivante :

$$\frac{\Delta e_x^2}{4} + \left(\frac{|\Delta e_y|}{2} + |\Delta j| \right)^2 = \Delta C^2$$

Ce domaine constitue une partie d'un cylindre dont la section droite est elliptique.

Les mono-impulsions telles que $\Delta j_y = 0$ vérifient

$$\begin{aligned} Z &= 0 \\ \text{ou } \alpha &= 0 \end{aligned}$$

et sont toutes optimales.

Le domaine est représenté par ses sections $\Delta a = \text{Cte}$ dans l'espace à 3 dimensions $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta j$ (planche 10), réduit à l'octant $\Delta e_x > 0, \Delta e_y > 0, \Delta j > 0$ par des considérations de symétrie résumées dans le tableau ci-dessous.

Δe_x	Δe_y	Δa	Δj	α	Y	Z
$-\Delta e_x$				$\pi - \alpha$	Y	$-Z$
	$-\Delta e_y$			$-\alpha$	Y	Z
		$-\Delta a$		$\pi + \alpha$	$-Y$	$-Z$
			$-\Delta j$	α	Y	$-Z$

Propulseur orientable dans le plan horizontal

